薬学の基礎としての数学・統計

第9回　講義時間 55分、
演習問題 35分

今日の授業の目標は

□ 定積分の意味がわかって計算ができること
□ 定積分の置換積分の計算ができること
□ 定積分の部分積分の計算ができること．

§5. 定積分

定積分とはどういうものかというと．

$f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = \underbrace{F(b) - F(a)}$$

で定義する。

~~原始関数に F(b) や F(a) を計算す~~ ことから、
関数の

□ $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ に
$x=b$ や $x=a$ を代入して計算することから、
関数の値を計算している。

□ 定積分には数値が現れる。

最初に2つの例を出します

□ $\displaystyle \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \underbrace{\frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}}}_{\text{xに4を代入した値}} - \underbrace{\frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}}}_{\text{xに0を代入した値}} = \frac{2}{3}\cdot \underbrace{(2^2)^{\frac{3}{2}}}_{\text{この部分は指数法則から}} = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}$

$2^{2\times\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$

□ $\displaystyle \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \left[\log|x|\right]_1^e = \log|e| - \log|1| = \underbrace{\log_e e}_{1} - \underbrace{\log_e 1}_{0} = 1 - 0 = 1$

定積分について、次の性質が成り立ちます
全部で6つの性質を書きます．

[1] $\displaystyle \int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ （ただし、k は定数）（関数 $f(x)$ を k 倍にから定積分を求めることも、関数 $f(x)$ の定積分を求めしから k 倍にしても答えは同じであることを言っている．）

[2] $\displaystyle \int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

（$f(x)+g(x)$ の定積分は、$f(x)$ の定積分と $g(x)$ の定積分の和に等しい．）

[3] $\displaystyle \int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

不定積分でも同じ結果が成り立っていた。（[1]〜[3]）

[4] $\displaystyle \int_a^a f(x)\,dx = 0$ （上の定積分の定義から $\displaystyle \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$ となるから）

[5] $\displaystyle \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

[6] $\displaystyle \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

定積分特有の性質です（[4]〜[6]）

この[1]から[6]の性質を使った計算を例として紹介します

□ $\int_1^2 \boxed{\frac{2x+3}{x^2}}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx \underset{[2]を使う}{=} \int_1^2 \frac{2}{x}dx + \int_1^2 \frac{3}{x^2}dx \underset{[1]を使う}{=} 2\int_1^2 \frac{1}{x}dx + 3\int_1^2 \overset{x^{-2}}{\overset{\|}{\boxed{\frac{1}{x^2}}}}\,dx$

この表示は $\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}$ を1つにしたものだから、バラバラにすると

$= 2\left[\log|x|\right]_1^2 + 3\left[-x^{-1}\right]_1^2$

$= 2(\log 2 - \underbrace{\log 1}_{0}) + 3(-\underbrace{2^{-1}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{1^{-1}}_{1}) = 2\log 2 + \frac{3}{2}$

□ $\int_{-1}^1 (e^x+e^{-x})dx \underset{[2]を使う}{=} \int_{-1}^1 e^x dx + \int_{-1}^1 e^{-x}dx$

□ $(e^x)' \underset{公式}{=} e^x$ これから、e^xの原始関数の1つはe^xである。

□ $(e^{-x})'$を考える。

$u=-x$ とおくと $y=e^u$ となる。

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = e^u\cdot(-1) = -e^{-x}$

合成関数の微分

∴ $(e^{-x})' = -e^{-x}$

両辺を-1倍すると

$(-e^{-x})' = e^{-x}$

これより e^{-x}の原始関数は $-e^{-x}$ である。

$= \left[e^x\right]_{-1}^1 + \left[-e^{-x}\right]_{-1}^1$

$= (e-e^{-1}) + (-e^{-1}+e^{1})$

$= 2(e-e^{-1})$

§6. 定積分の置換積分法

不定積分における置換積分法のとき、例を使って説明したので、ここでも例を使って説明します。

例: 定積分 $\int_0^2 x(2-x)^3dx$ を求めよ。

$2-x=t$ とおくと、

$x=-t+2$

xはtの関数だから、tで微分できる。

このことを式で書くと

$\frac{dx}{dt}=-1 \to dx=-dt$ となる。

xが0から2まで動くとき、tはどの範囲を動くか?

x	$0 \to 2$
t	$2 \to 0$

$$\int_0^2 x(2-x)^3dx = \int_2^0(-t+2)t^3(-dt)$$
$$= \int_2^0 (t-2)t^3dt$$
$$= -\int_0^2(t^4-2t^3)dt$$
[5]を使う
$$= -\int_0^2 t^4dt + 2\int_0^2 t^3dt$$
$$= -\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^2 + 2\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2$$
$$= -\frac{32}{5} + 2\cdot\frac{16}{4} = -\frac{32}{5}+8 = \frac{8}{5}$$

もう1つ例を出します。

例：定積分 $\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$ を求めよ。

$\sqrt{2-x} = t$ とおく。

両辺を2乗すると

$2-x = t^2$

$x = -t^2+2$

$\frac{dx}{dt} = -2t \rightarrow dx = -2t\,dt$

x	$0 \rightarrow 2$
t	$\sqrt{2} \rightarrow 0$

$$\therefore \int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^0 (-t^2+2)\,t\,(-2t)dt$$
$$= \int_{\sqrt{2}}^0 (2t^4-4t^2)dt = 2\int_{\sqrt{2}}^0 t^4dt - 4\int_{\sqrt{2}}^0 t^2dt$$
$$= -2\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}} + 4\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}$$
$$= -2\cdot\frac{(\sqrt{2})^5}{5} + 4\cdot\frac{(\sqrt{2})^3}{3}$$
$$= -2\cdot\frac{2\cdot2\cdot\sqrt{2}}{5} + 4\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$= -\frac{8}{5}\sqrt{2} + \frac{8}{3}\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\underbrace{\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)}_{\frac{-3+5}{15}} = 8\sqrt{2}\cdot\frac{2}{15} = \frac{16\sqrt{2}}{15}$$

§7. 定積分の部分積分法

例：定積分 $\int_1^e x\log x\,dx$ を求めよ。

$\log x$ が出てきたら、だいたい部分積分です。$\log x$ の扱いは難しいから、x の方を変形します。

$$\int_1^e x\log x\,dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)(\log x)'dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^e - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e$$
$$= \left(\frac{e^2}{2}\underset{1}{\underset{\parallel}{\log e}} - \frac{1}{2}\underset{0}{\underset{\parallel}{\log 1}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{2}+\frac{1}{4}$$