薬学の基礎としての数学・統計

7回目講義

講義時間45分，演習問題45分

第4章 積分法

§1. 不定積分

xの関数$F(x)$があって，この関数を微分すると$f(x)$になるとする。すなわち

$$F'(x) = f(x)$$

このとき，$F(x)$を$f(x)$の原始関数という。

$F(x)$が$f(x)$の原始関数なら，$F(x)+C$（Cは定数 constant）も$f(x)$の原始関数です。

原始関数が1つ見つかると，その定数和も原始関数になる。

原始関数をまとめて $\int f(x)dx$ と表し，$f(x)$の不定積分という。

すなわち，

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Cを積分定数という。

この記号は積分記号 integral

この部分は，xで微分して$f(x)$になる不定積分を求めなさいという意味。

微分と積分の関係は

$$f(x) \underset{\text{微分}}{\overset{\text{積分}}{\rightleftarrows}} F(x)+C$$

往路と復路の関数にある。

例えば

$\alpha \neq -1$なら

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha} \qquad (\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

分母$\alpha+1$より$\alpha \neq -1$という条件が付いている。

x^{α}の原始関数は$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$より

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$\frac{1}{x}$の原始関数は$\log|x|$より

$$\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$$

ここで C は積分定数である。

これ以降，Cは積分定数を表すものとする。

関数の定数倍・和・差の不定積分について次の公式が成り立つ。

[1] $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

$f(x)$ を k 倍した不定積分は、不定積分の k 倍に等しい。

[2] $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2つの関数の和の不定積分は、各々の不定積分の和に等しい。

[3] $\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

この3つの公式を使って次の計算をしてみます。

$$\int \frac{2x^2-4x+3}{x}dx = \int \left(2x-4+\frac{3}{x}\right)dx$$
$$= 2\int x dx - 4\int dx + 3\int \frac{1}{x}dx$$
$$= x^2 - 4x + 3\log|x| + C$$

今、$f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とする。

a, b を定数とし

$$\{F(ax+b)\}' = aF'(ax+b) = af(ax+b)$$

この部分は合成関数の微分を使っている。

$u = ax+b$ とおくと、

$$\frac{d}{dx}F(u) \underset{\text{合成関数の微分}}{=} \frac{d}{du}F(u)\cdot\frac{du}{dx} = f(u)\cdot a = af(ax+b)$$

$\left\{\frac{1}{a}F(ax+b)\right\}' = f(ax+b)$ だから、

$\frac{1}{a}F(ax+b)$ は $f(ax+b)$ の原始関数であることを言っている。

$$\therefore \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

ただし、$a \neq 0$ という条件が必要です。

例えば、$\int (5x+2)^3 dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}(5x+2)^4 + C = \frac{1}{20}(5x+2)^4 + C$

上の公式から。

が出てくる。

$$\boxed{\int \underset{f(x)}{x^3} dx = \underset{F(x)}{\frac{1}{4}x^4} + C \text{ だから。}}$$

§2. 置換積分法

ここは例を使って解説します。

例 不定積分 $\int (2x-5)^3 dx$ を置換積分法を使って求める。

□ ここでは $2x-5$ を1つの塊と見ます。
1つの塊と見るということは、$2x-5$ を1個の変数で表すということ。

$2x-5 = t$ とおくと

$$x = \frac{t+5}{2}$$

このように置くと x は t の関数だから、t で微分できる。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$$

□ 目標は t の式をすべて t を使って表すこと。
だから、

$$\int (2x-5)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\int t^3 dt$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}t^4 + C$$
$$= \frac{1}{8}(2x-5)^4 + C$$

例 不定積分 $\int 2x(x^2+1)^3 dx$ を置換積分法を使って求める。

$x^2+1 = t$ とおく。
t は x の関数だから、x で微分できる

$$\frac{dt}{dx} = 2x \longrightarrow dt = 2x\,dx$$

$$\int 2x(x^2+1)^3 dx = \int (x^2+1)^3 2x\,dx = \int t^3 dt$$
$$= \frac{1}{4}t^4 + C$$
$$= \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C$$

置換積分法に関して一般に次の公式が成り立ちます。

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log|g(x)| + C$$

例えば、

$$\int \frac{2x}{x^2+4} dx = \int \frac{(x^2+4)'}{x^2+4} dx = \log|x^2+4| + C$$
$$= \log(x^2+4) + C$$

§3. 部分積分法

公式：$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

例えば、

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx$$
$$= xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + C$$
$$= e^x(x-1) + C$$