薬学の基礎としての数学・統計

5回目 講義
講義時間 1時間10分、演習時間 20分

§3. 合成関数の微分法

今、$y=(x^2+1)^3$ という関数を考えます。

$u=x^2+1$ とおくと、$y=u^3$ となる。ただし、$u=x^2+1$ となる。
このように考えると
$y=(x^2+1)^3$ は $y=u^3$ と $u=x^2+1$ の合成関数 である。

合成関数の微分について次が成り立つ。
$y=f(u)$ と $u=g(x)$ が微分可能ならば
合成関数 $y=f(g(x))$ も微分可能であり、次が成り立つ：

$$\boxed{\frac{dy}{dx}} = \boxed{\frac{dy}{du}}\,\boxed{\frac{du}{dx}}$$

← u を x で微分するという意味。

これは y を x で微分するという意味　　y を u で微分するという意味

この式を<u>合成関数の微分法</u>という。

たとえば $y=(x^2+1)^3$ を x で微分してみよう。

<u>$u=x^2+1$</u> とおくと、<u>$y=u^3$</u>

u は x の関数だから
u を x で微分できる。
これを式で書くと
$$\frac{du}{dx}=2x$$

y は u の関数だから
y を u で微分できる。
これを式で書くと
$$\frac{dy}{du}=3u^2$$

$y=(x^2+1)^3$ を x で微分ということは
$\frac{dy}{dx}$ を求めるということになる。

合成関数の微分より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=3u^2\cdot 2x=6xu^2$$
$$=6x(x^2+1)^2$$
となる。

§4. 対数関数・指数関数の導関数

□今日の講義では対数関数の導関数を求める。

$\log_a x$ の $x=1$ における微分係数は、

微分係数の定義より

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+h)-\log_a 1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+h) \quad \left(\because \log_a(1+h)-\log_a 1 = \log_a\frac{1+h}{1}=\log_a(1+h)\right)$$

4/27
2回目の講義

$$=\lim_{h\to 0}\log_a(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

この式の意味は、$h\to 0$ のとき $\log_a(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を求めるということ。

$\log_a$ は関数だから、入力するデータとして $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を計算してから その値を $\log_a$ に代入しても構わない。

だから、

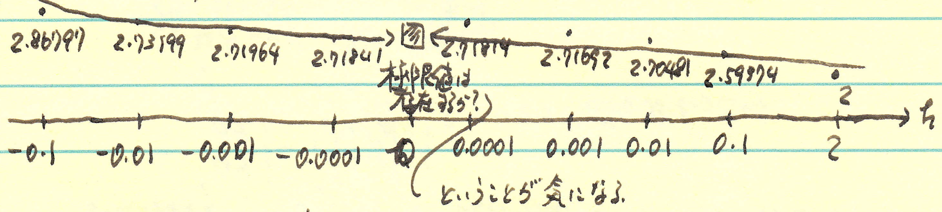
$$=\log_a\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)$$ を求めればよい。

0に近い h の値に対する $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の値を実際に計算すると

h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$	h	$(1+h)^{\frac{1}{h}}$
1	2		
0.1	2.59374…	−0.1	2.86797…
0.01	2.70481…	−0.01	2.73199…
0.001	2.71692…	−0.001	2.71964…
0.0001	2.71814…	−0.0001	2.71841…

h が正の方向から0に近づく場合

← h が負の方向から0に近づく場合



$h\to 0$ のとき $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の極限値は存在し、
その値は無理数で $\underline{2.71828\ 1828\ 459045\cdots}$
これを e で表す。

すなわち、

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

である。

対数関数 $\log_a x$ の $x=1$ における微分係数を e で表すと

$$\lim_{h\to 0}\log_a(1+h)^{\frac{1}{h}}=\log_a\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)=\log_a e$$ となる。

この式で $a=e$ とおくと

$$\lim_{h\to 0}\left(\log_e(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)=\log_e e=1$$ となる。

底が e である対数を <u>自然対数</u> といい、$\log x$ と書く。
底 e は書かないルールである。

対数関数 $\log x$ の導関数は次のようにして求められる.

$$(\log x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$k = \frac{h}{x}$ とおくと $h\to 0$ のとき $k\to 0$ である.

上の式を k を使って書き直すと

$$= \lim_{k\to 0} \frac{1}{xk}\log(1+k)$$

x は $k\to 0$ のとき
k の動きに関係ないから前に出す.

$$= \frac{1}{x}\lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\log(1+k)$$

$$= \frac{1}{x}\underbrace{\lim_{k\to 0} \log(1+k)^{\frac{1}{k}}}_{\text{これは先程計算したように } \log e \text{ となる.}}$$

$$= \frac{1}{x}\underbrace{\log e}_{1}$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\therefore (\log x)' = \frac{1}{x}$$

例えば $(\log 2x)'$ を求めてみる.

$\underbrace{u = 2x}$ とおくと. $\log u$ となる.

このとき, 上の公式から $(\log u)$ を u で微分すると.

u を x で微分すると $\frac{du}{dx} = 2$ となる.

すなわち $\frac{d}{du}\log u = \frac{1}{u}$
上の公式

合成関数の微分を使うと

$$\frac{d}{dx}\log 2x = \frac{d}{du}\log u \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u}\times 2$$

$$= \frac{2}{2x}$$

$$= \frac{1}{x}$$

一般の対数関数 $\log_a x$ の導関数については.

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{\log a}(\log x)' = \frac{1}{x\log a}$$

4/17
2回目の講義

以上をまとめると, 次のようになる.

対数関数の導関数:

$$(\log x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x\log a}$$

例えば、$\{\log_4(x-1)\}'$ を求めてみる。

$u=x-1$ とおくと、$(\log_4 u)'$ となる。

$\{\log_4(x-1)\}'$ というのは、

は x の関数だから x で微分するということ。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\log_4(x-1)=\left(\frac{d}{du}\log_4 u\right)\times\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$=\frac{1}{u\log 4}(x-1)'$$

$$=\frac{1}{(x-1)\log 4}$$ となる。

次に、$\log\underset{\sim\sim}{|x|}$ の導関数を求めてみる。

真数条件より $|x|\neq 0$ である。

□ $x>0$ のとき、$(\log|x|)'=(\log x)'=\frac{1}{x}$

□ $x<0$ のとき、$(\log|x|)'=(\log(-x))'=\frac{1}{-x}(-x)'=\frac{1}{x}$

従って、次の公式が成り立つ：

$$(\log|x|)'=\frac{1}{x}$$

最後に、対数微分法について述べます。

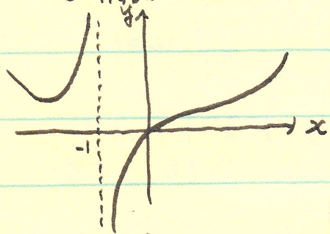
$y=f(x)$ が微分可能ならば、

$\underset{\sim\sim}{f(x)\neq 0}$ である x の範囲においては $\log|y|=\log|f(x)|$ も微分可能である。

真数条件から $f(x)\neq 0$ である。

例えば、$y=\frac{x^3}{x+1}$ を考える。

この関数はどういう形をしているかというと



x^3 の絶対値は、$|x|$ の3乗に等しい。

両辺の絶対値をとると

$$|y|=\left|\frac{x^3}{x+1}\right|=\frac{|x^3|}{|x+1|}=\frac{|x|^3}{|x+1|}$$

全体に絶対値をとるということは、分母分子にそれぞれ絶対値を付けても同じである。

両辺の対数をとると

$$\log|y|=3\log|x|-\log|x+1|$$

両辺を x で微分する。

□ 左辺 $=\frac{d}{dx}\log|y|\underset{\text{合成関数の微分}}{=}\frac{d}{dy}\log|y|\times\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$

□ 右辺 $=\frac{3}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x+3}{x(x+1)}$

$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3}{x(x+1)}\rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3}{x(x+1)}y=\frac{2x+3}{x(x+1)}\frac{x^3}{x+1}=\frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$