薬学の基礎としての数学・統計

4回目　講義　1時間10分
2012/05/01　演習　20分

最初に前回の授業でやり残したことから話します。

§4. 循環小数

循環小数というのは、

循環小数 = 同じ数字の並びがくり返し現れる無限小数　のことです。

たとえば、

$\frac{1}{9} = 0.111\cdots = 0.\dot{1}$
1がずっと続きます。

$\frac{29}{135} = 0.2148148148\cdots = 0.2\dot{1}4\dot{8}$　とあらわします。
148という数字の並びがずっと続きます。

これからやりたいことは、

目的：循環小数を無限等比級数を用いて分数表示することです。
分数の形で表すこと

たとえば、

□ $0.\dot{5}\dot{7} = 0.575757\cdots$　ということなのですが、これどおりの表現を使って表すと

$= 0.57 + 0.0057 + 0.000057 + \cdots$

$= 0.57 + 0.57 \times 0.01 + 0.57 \times 0.01^2 + \cdots$

このように見ると、これは
初項が0.57、公比が0.01で表される等比数列の無限級数です。
公比が0.01で1より小さいから、
前回の授業で習ったことより

$0.\dot{5}\dot{7} = \frac{0.57}{1-0.01} = \frac{57}{99} = \frac{19}{33}$　となります。

□ $0.\dot{9} = 0.999\cdots$

$= 0.9 + 0.9 \times 0.1 + 0.9 \times 0.1^2 + \cdots$

これは初項が0.9、公比が0.1で表される等比数列の無限級数になっています。
だから

$0.\dot{9} = \frac{0.9}{1-0.1} = 1$

循環小数 $0.\dot{9}$ は1に等しいことがわかります。

それでは今日の授業のMAINである微分法について解説します。

第3章 微分法

微分は関数の極限の概念を使って定義するので、
微分について話す前に関数の極限について説明します。
前回の第2章でしゃべったのは数列の極限でした。
数列の極限は

$n \to \infty$ のとき、数列がある一定の値に限りなく近づく。

自然数
natural numberの
頭文字を取って ~~自然数をnという~~ 記号で表します。

ということでしたが、
関数の極限というときは、$x \to$ 定数 or $x \to \infty$ という

共に実数を動く。
又は連続値を動きます。

§1. 関数の極限

関数 $y = f(x)$ において、

x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき、
$f(x)$ が一定の値 α に限りなく近づくなら、

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ と書きます。

α を極限値という

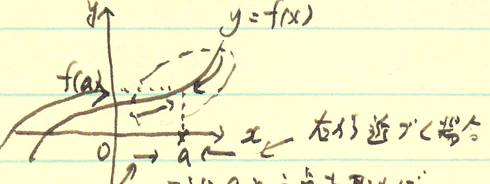
これが第2条件です。

まずこれが第1条件。
これを記号で表したのが
$x \to a$
という部分です。

第1条件と第2条件を合わせて、

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ と書いています。

これが関数の極限の定義です。
これをグラフを描いて考えてみると、次のようになります。



ここにaという点を取れば
y座標は $f(a)$ という値を取っています。

上の1番目の条件は、x の a の近づき方については何も言ってないから、

x が a に右から近づく場合と、
x が a に左 〃 〃

の2種類を考えないといけないことがわかります。

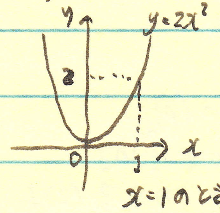
これに応じて、y軸の $f(x)$ の値は
この2種類の近づき方があります。

この2種類の近づき方について、ある一定の値に限りなく
近づくというのが関数の極限の定義です。

2つ例をやってみましょう。

例) $f(x)=2x^2$

$f(x)=2x^2$ というグラフは



$x=1$ のとき、$y=2$ という値をとります。

このとき x が 右から 1 に 近づいても、
左から 1 に 〃

$y=f(x)$ は 2 という値に限りなく近づきます。

だから、 $\lim_{x\to 1} 2x^2=2$ ということがわかります。

例). $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$

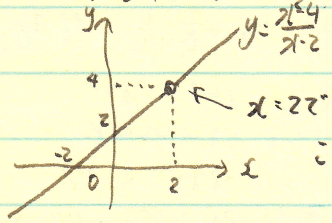
この関数は $x=2$ で定義されていません。
定義されていないとは、$x=2$ で $f(x)$ は制限されていない ということです。

何故なら、$x=2$ なら 分母である $x-2=0$ となるから。

$$f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2 \quad \text{if} \quad x\neq 2$$

この条件のもとで、$f(x)$ は $f(x)=x+2$ という簡単な形になります。

グラフを描くと



$x=2$ で定義されていないから ○ と書く。

このとき
x が 右から 2 に 近づいても
左から 2 〃
$f(x)$ は 4 という値に限りなく近づきます。
だから、
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$
ということがわかります。

※ 上の例は、
1番目 = 連続な関数の極限値をもつ例
2番目 = 不連続な関数 についても 極限値をもつ例
として出しました。

先程の例は、xがある特定の値に限りなく近づく例を出しましたが、
別の極限値を考えることもできます。それは、$x \to \infty$ や $x \to -\infty$ といった場合の極限値です。

例えば、

(1) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{3x+2}{5x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{5-\frac{1}{x}} = \frac{3+0}{5-0} = \frac{3}{5}$

これより $x \neq 0$ です。

分母分子をxで割ることができる。

(2) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{4x+1}{4x^2-2x+3} = \lim_{t \to \infty} \frac{-4t+1}{4t^2+2t+3} = \lim_{t \to \infty} \frac{-\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}}{4+\frac{2}{t}+\frac{3}{t^2}} = 0$

今度はxが$-\infty$に大きくなる場合です。

$x=-t$とおくと

$x \to -\infty$のとき、$t \to \infty$です。

このことを使って式を書きかえると

ここまで準備すると、第3章のタイトルである微分法について解説できます。

§2. 導関数

ある関数が導かれた関数という意味です。

関数 $y=f(x)$ について

極限値 $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき、

この値を $x=a$ における $f(x)$ の微分係数といい、$f'(a)$で表す。

すなわち、

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ です。}$$

$f'(a)$が存在するとき、すなわち、極限値が存在するとき、

$f(x)$は $x=a$ で微分可能であるといいます。

例えば、$f(x)=\frac{1}{x}$ について、$x=2$における微分係数を求めてみましょう。

$f'(2)$を求めるということですが、

これは上の式で $a=2$ に当たります。

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$f(2+h) = \frac{1}{2+h}$$

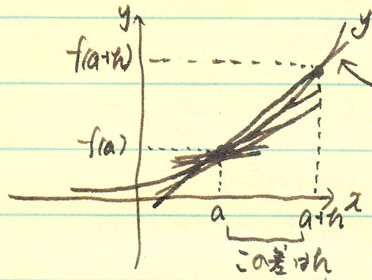
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{2(2+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(2+h)}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

ここで、微分係数をグラフで考えてみましょう。



この2点を結んでできる直線の傾きは $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ です。

この値が $\lim_{h \to 0}$ の中身に出てきています。

このとき、$h \to 0$ にするということは、

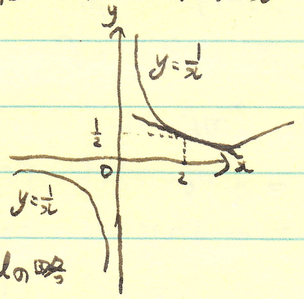
この差が限りなく0に近づくということです。

それに応じて、$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は、

点 $(a, f(a))$ における $y=f(x)$ の接線の傾きになります。

これが微分係数のグラフにおける解釈です。

先程の例で $f(x)=\frac{1}{x}$ のとき、$f'(2)=-\frac{1}{4}$ でした。



この接線の傾きが $-\frac{1}{4}$ ということです。

intervalの略

I をある区間とします。

$y=f(x)$ が区間 I に属するすべての点において微分可能なら、

<u>$f(x)$ は区間 I において微分可能</u>

であるといいます。このとき、

I に属するすべての点に対して、$f'(a)$ が計算できるなら、

$a \longmapsto f'(a)$

という新しい関数 $f'(x)$ を作ることができます。

この $f'(x)$ を<u>導関数</u>といいます。

導関数を求めることを、関数 $f(x)$ を<u>x について微分する</u>といいます。

導関数の定義は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

aの代わりに変数xをもってきたもの。

導関数を表す記号としては、

$f'(x)$ の他に y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$ があります。

読むときは dy dx という。

$f(x)=x^4$ の導関数を求めてみよう。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$$

ここで
$$(x+h)^4-x^4=x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-h^4$$
$$=4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3)$$
$$=4x^3$$

一般に r が実数のとき、
$$(x^r)'=rx^{r-1} \qquad \cdots(*)$$
が成り立ちます。

関数 $f(x)$, $g(x)$ が微分可能であるとき、
次の公式が成り立ちます。ただし、c, k は定数です。

[1] $(c)'=0$ （定数項の微分は0である）

[2] $\{kf(x)\}'=kf'(x)$

[3] $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

[4] $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

例: $y=2x^5+3x^4-4x+5$ を微分せよ。

$$y' \underset{[3],[4]}{=} (2x^5)'+(3x^4)'-(4x)'+(5)'$$
$$\underset{\substack{[1],[2]\\(*)}}{=} 2\times 5x^4+3\times 4x^3-4\times x^0+0$$
$$=10x^4+12x^3-4$$

$f(x)$, $g(x)$ が微分可能なら、

- □ $f(x)g(x)$ は微分可能であり
$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

- □ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は微分可能であり
$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=\frac{-g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$
$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

ただし、$g(x)\neq 0$ とする。