薬学の基礎としての数学・統計

3回目講義　2012年4月24日(火)

講義時間 1時間7分　演習時間 23分

今日の授業の目標は、

第2章 数列の極限

というタイトルで

□ 数列の極限の定義 と 等比数列 が収束するための必要十分条件 を与えること

□ 無限級数の定義 ~~と極限値~~ を与えること。

特に、等比数列に対する無限級数 を求める。

□ 循環小数

の3つについて話をします。最後に 演習問題 の3回目の配付と 提出部の返却 をします。

第2章 数列の極限

§1. 数列の極限

$\boxed{a_1}, a_2, a_3, \cdots, \boxed{a_n}, \cdots$

ここに書いたのは

1つ1つが数(特に実数)で、これらの数の列が無限に続くとする。

このような無限に続く数の列を 無限数列 という。

1番目の数を 初項 という。　n番目の数を 第n項 という。

このような数列を $\{a_n\}$ で表す。

この数列を表す記号は { } の中に第n項の数の形を書くという習慣がある。

ここまでは数列の一般的な定義です。

これから どのような数列に興味があるかというと、

□ nが限りなく大きくなるにつれて

a_nが一定の値αに限りなく近づく。

このとき、数列$\{a_n\}$はαに収束するという。

このことを $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と書く。

(αを数列$\{a_n\}$の極限値という)

※ 数列$\{a_n\}$に対して、$n\to\infty$のとき a_nはαに一致する場合もあるが、

a_nがαに一致しないときもある。

(こちらの方が多い)

だから、$\boxed{\lim_{n\to\infty}} a_n = \alpha$

数列$\{a_n\}$がαに一致しないことの方が多いから、

a_nの左側に $\lim_{n\to\infty}$ という記号を付けている。

□ 上では収束する場合を考えたが、

収束しない数列も存在する。

数列$\{a_n\}$が収束しないとき、$\{a_n\}$は発散するという。

発散には3種類あります。

□ 正の無限大に発散

□ 負の 〃 〃

□ 振動

それでは具体的な数列について収束・発散を考えてみます。

数列	数列の収束・発散
□ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 第n項が$\frac{1}{n}$で表される数列 だから、$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \cdots$	$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
□ $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ nが限りなく大きくなると、振動しながら0に収束する という数列	$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$
□ $\left\{\frac{n+1}{2}\right\}$	$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty$
□ $\left\{-2^{n-1}\right\}$	$\lim_{n\to\infty} (-2^{n-1}) = -\infty$
□ $\left\{(-1)^n\right\}$ nが偶数なら1, nが奇数なら-1	$\lim_{n\to\infty} (-1)^n =$ 振動

数列の極限値について、次の性質が成り立つ：

数列$\{a_n\}, \{b_n\}$が収束して、
(収束するということは極限値が存在するということ)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき

(1) $\lim_{n\to\infty} (ka_n) = k\alpha$　　ただし、kは定数

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$,　$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$

これはどういう意味かというと
$a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \cdots, a_n+b_n, \cdots$
このように新しい数列を作って、
この新しい数列の極限を考えると 上の式が成立つ

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$　　ただし、$\beta \neq 0$

次に4つの例を挙げる。

例. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}}$

nは自然数だから、
$n \neq 0$である。
$n \neq 0$より分母・分子をnで割ると

分母・分子に各々1つずつ数列が現れている。
分子 $= \left\{2+\frac{3}{n}\right\} = 2+\frac{3}{1}, 2+\frac{3}{2}, 2+\frac{3}{3}, 2+\frac{3}{4}, \cdots$
$n\to\infty$のとき、$\frac{3}{n} \to 0$である。
だから、$2+\frac{3}{n} \to 2+0 = 2$
分母 $= \left\{1+\frac{4}{n}\right\} = 1+\frac{4}{1}, 1+\frac{4}{2}, 1+\frac{4}{3}, 1+\frac{4}{4}, 1+\frac{4}{5}, \cdots$
$n\to\infty$のとき、$\frac{4}{n} \to 0$である
だから、$1+\frac{4}{n} \to 1+0 = 1$

$= \frac{2+0}{1+0} = 2$

先程の性質の(4)を使っている

分子は正の無限大に発散

例) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\frac{3}{n}}{1+\frac{4}{n}}$

分母・分子をnで割る。

分母は1に収束

~~[illegible]~~ 分母は限りなく1に近づくが、
分子は正の無限大に発散
→この式の場合、
分母の収束より分子の発散が勝る
だから、
$=\infty$ となる。

例) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2-3n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{3}{n}\right)$

この数列は正の無限大に発散

1に収束

$=$ 発散 $\times$ 収束
$=$ 発散 $\times$ (定数と見ると) ということ
$=\infty$

例) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

§2. 数列 $\{r^n\}$ の極限

$\boxed{a}, ar, ar^2, \cdots, \boxed{ar^{n-1}}, \cdots$

$\times r$ $\times r$ $\times r$

初項

これが第n項

このような数列を
初項a, 公比rの無限等比数列という。

これから、無限等比数列の収束・発散について調べてみる。

(1) $r>1$ のとき、

$r=1+h,\ h>0$ とおく、

$r^2=(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h$

$r^3=(1+h)^3=1+3h+3h^2+h^3>1+3h$

⋮ ⋮

このように考えていくと、
$n\geqq 2$ なら、$r^n>1+nh$ が成り立つことがわかる。

だから、

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$ より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$ である。

$h>0$
hは constant

$r^n>1+nh$
の両辺に $\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ をとっている。

(2) $r=1$ なら、$r^n=1$ より
この場合は 1が無限に続く数列である。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=1$.

(3) (i) $0<r<1$ のとき.

$\frac{1}{r}=s$ とおくと. $s>1$ である。

このとき (1) より $\lim_{n\to\infty} s^n=\infty$ である.

$r=\frac{1}{s}$ より $r^n=\left(\frac{1}{s}\right)^n=\frac{1}{s^n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s^n}=0$

(ii) $r=0$ のとき. $r^n=0$. $\therefore \lim_{n\to\infty} r^n=0$

(iii) $-1<r<0$ のとき.

$-r=t$ とすると. $0<t<1$

このとき. (3) (i) より $\lim_{n\to\infty} t^n=0$

振動しながら 0に収束する.

$\therefore \lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n t^n=0$

(4) (i) $r=-1$ のとき.

$-1, 1, -1, 1, \cdots$ となるから振動する.

(ii) $r<-1$ のとき.

$-r=t$ とすると. $t>1$ である.

$r^n=(-1)^n t^n$

$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}|(-1)^n t^n|=\lim_{n\to\infty} t^n$

(1) より $\lim_{n\to\infty} t^n=\infty$ であるから. $\lim_{n\to\infty}\underline{|r^n|}=\infty$

ここでは絶対値が付いている.
絶対値を外すと.
r^nは符号が交互に変わるから
$\{r^n\}$は振動する.

上のことをまとめると.
次のことが成り立つ:

$\{r^n\}$の極限について:

(1) $r>1$ のとき. $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$

(2) $r=1$ のとき. $\lim_{n\to\infty} r^n=1$

(3) $|r|<1$ のとき. $\lim_{n\to\infty} r^n=0$

(4) $r\leqq -1$ のとき $\{r^n\}$は振動し. $\lim_{n\to\infty} r^n$ は存在しない。

このことから わかることは.

数列 $\{r^n\}$ が収束する $\underset{\text{必要十分条件}}{\Longleftrightarrow}$ $-1<r\leqq 1$ である。

例. $\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-5^n}{3^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n-1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

分母・分子を 5^n で割る.

§3. 無限級数

無限数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき、

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ となる。}$$

の形の式を<u>無限級数</u>という。この無限級数を Σ という記号を用いる

初項から第 n 項までの和

$$S_n = a_1+\cdots+a_n \leftarrow \left(\begin{array}{l} S_1=a_1 \\ S_2=a_1+a_2 \\ S_3=a_1+a_2+a_3 \\ \vdots \end{array}\right)$$

と考える。数列 $\{S_n\}$ が

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

であるとき、無限級数は S に収束するという。

※ $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ であるとき、

無限級数 $a_1+\cdots+a_n+\cdots$ が定義(できる)という意味である。

無限等比級数:

初項 a、公比 r の等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ から作られる無限級数

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

を初項 a、公比 r の<u>無限等比級数</u>という。

$a\neq 0$ とする。

$a=0$ なら、無限等比級数は 0 になる。

$r\neq 1$ なら、$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$r=1$ なら $S_n = na$

である。

$|r|<1$ なら、$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ であるから $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$

$r=1$ なら、$\lim_{n\to\infty} S_n = a\lim_{n\to\infty} n$ は発散する。

正の無限大に発散か
負の無限大に発散かは a の値に依存する。

$r\leqq -1$ または $r>1$ なら $\{r^n\}$ は発散するから、$\{S_n\}$ も発散する。

以上をまとめると、

$a\neq 0$ のとき、

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

は

[1] $|r|<1$ のとき収束して、その和は $\dfrac{a}{1-r}$

[2] $|r|\geqq 1$ のとき発散する。

例 (1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$

初項 1, 公比 $\frac{1}{3}$ → 収束 → $\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$

(2) $2-4+8-16+\cdots$

初項 2, 公比 -2 → 発散