薬学の基礎としての数学・統計

2回目講義。 2012年4月17日(火)

講義 1時間5分，演習25分

前回の授業で、指数法則は指数が有理数である場合にも成り立つことを話しました。
そこに至るまでに、指数が整数のとき指数法則が成り立つことを話して、
そして、累乗根の説明、累乗根から指数法則が指数部分＝有理数に対しても
成り立つことを話しました。

今日の授業の内容は前回の続きです。メニューは、

1. 指数pが実数のときも正の数aに対して累乗a^pが定義できることの紹介
2. 指数関数と対数関数を定義すること。
3. 前回の演習問題1を返却して、新たに演習問題2をすること。

です。

指数pが無理数のときも、正の数aに対して累乗a^pを次のように定義します。

例えば、 $\sqrt{2} = 1.41421\cdots$

これは無限に続きます。
この数は分数の形で表すことができないので、
無理数といいます。

前回は累乗根という言葉を使いました。
累乗根というのは、ある数を何乗かしてようやく
aに達する数のことでした。
それは丁度根になっている
ということから累乗根という
言葉を使った。ただ単に
何乗かするということだけなら
累乗という言葉を使います。

次のような3の累乗の列を考えます。

$$3^1,\ 3^{1.4},\ 3^{1.41},\ 3^{1.414},\ 3^{1.4142},\ 3^{1.41421},\ \cdots$$

ここに書いてある指数は、
$\sqrt{2}$の小数第1位から順番に取ってきて並べた指数です。
だから、この操作を続けていけば、指数部は$\sqrt{2}$の値を近似していることになります。

$$3^{1.4} = 3^1 \times 3^{0.4} = 3^1 \times 3^{\frac{4}{10}}$$

$$3^{1.41} = 3^1 \times 3^{0.4} \times 3^{0.01} = 3^1 \times 3^{\frac{4}{10}} \times 3^{\frac{1}{100}}$$

という具合に、指数部分は有理数で表されています。
前回の授業から、これらは計算可能です。

$$3^1 = 3$$
$$3^{1.4} = 4.6555367 2\cdots$$
$$3^{1.41} = 4.70696500\cdots$$
$$3^{1.414} = 4.72769503\cdots$$
$$3^{1.4142} = 4.72873393\cdots$$

と計算できます。すると、これらの値はある一定の値 $4.728804386\cdots$
に近づくことがわかります。まだ勉強していないけど、
極限値という概念で表すと、この数列には極限値が存在するということです。
そこで、この値を$3^{\sqrt{2}}$と定めることにします。

この例は $3^{\sqrt{2}}$ ですが、一般に指数が実数であっても
極限値の概念を用いて、正の数 a に対して a の実数の累乗を定義できます。
すなわち、$a>0$ に対して、実数 p があって a^p を考えることができるということです。
このときも指数法則（その2）が成り立ちます。

何故こういうことを考えるかというと、
指数部分が実数範囲全体を動くと、指数部は連続的に動きます。
すると、指数関数を考えることができて、グラフを描くことができるからです。

§3. 指数関数

それでは、これから指数関数について勉強します。

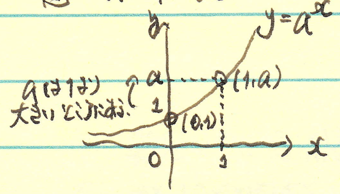
$a>0,\ a\neq 1$ のとき、$y=a^x$ を、a を底とする<u>指数関数</u>といいます。

このカンマは
かつ, and
という意味

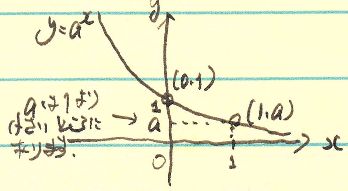
※ 指数関数というときは、いつも底 a は $a>0,\ a\neq 1$ という条件を付けます。
※ 指数法則というときは $a>0$ という条件しかなかった。
何故、指数関数というときは
指数法則 + $a\neq 1$
という条件が付くのかというと、後で指数関数を使って対数関数を定義するときに、
$a\neq 1$ という条件が必要だからです。

指数関数のグラフは2種類あります。

① $a>1$ なら



② $0<a<1$ なら



このグラフを描くときに
$x=\sqrt{2}$ のとき $a^{\sqrt{2}}$ が計算でき

指数関数の性質をまとめると、次のようになります。

(1) 定義域は実数全体、値域は正の実数全体

input する値が動く領域
これは x 軸のこと。

output される値の領域
上のグラフを見ると、y 軸で正の領域になっている。

(2) グラフは点 $(0,1)$, $(1,a)$ を通る。

(3) $a>1$ なら $p<q \longleftrightarrow a^p<a^q$
$0<a<1$ なら $p<q \longleftrightarrow a^p>a^q$

また、対数の定義から、次のことがわかります。

□ $\log_a (a^p) = p \longleftrightarrow a^p = a^p$

□ $\log_a 1 = 0 \longleftrightarrow a^0 = 1$

□ $\log_a a = 1 \longleftrightarrow a^1 = a$

対数の性質として次が成り立ちます。

$a>0,\ a \neq 1,\ M>0,\ N>0$ のとき

(1) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

(2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

(3) $\log_a (M^r) = r\log_a M$

例

時間がなかったから略

簡単に証明：

(1) $\log_a M = p,\ \log_a N = q$ とおく

$a^p = M \qquad a^q = N$

$MN = a^p a^q = a^{p+q}$

これを対数の言葉で表すと

$\log_a (MN) = p+q = \log_a M + \log_a N$

(3) $\log_a M = p \longleftrightarrow a^p = M$

両辺を r 乗すると

$M^r = (a^p)^r = a^{pr}$

$\log_a M^r = pr = r\log_a M$

対数の特別な場合として

□ $\log_a \frac{1}{N} = \log_a N^{-1} = -\log_a N$

□ $\log_a \sqrt[n]{M} = \log_a (M^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\log_a M$

計算

(1) $\log_2 \frac{4}{3} + \log_2 24 = \log_2 \left(\frac{4}{3} \times 24\right) = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5\log_2 2 = 5 \times 1 = 5$

(2) $6\log_3 \sqrt{6} - \log_3 8 = 6\log_3 6^{\frac{1}{2}} - \log_3 2^3 = \log_3 (6^{\frac{1}{2}})^6 - \log_3 2^3 = \log_3 6^3 - \log_3 2^3$

$= \log_3 \frac{6^3}{2^3} = \log_3 \left(\frac{6}{2}\right)^3 = \log_3 3^3 = 3\log_3 3 = 3 \times 1 = 3$

もう一つだけ公式の紹介をします。

a・b・c が正の数で $a \neq 1,\ c \neq 1$ のとき

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

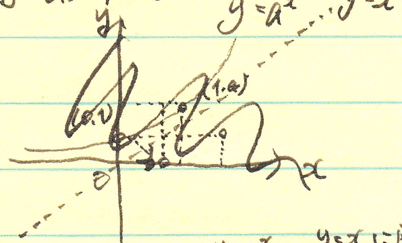
これを底の変換公式といいます

35. 対数関数のグラフ

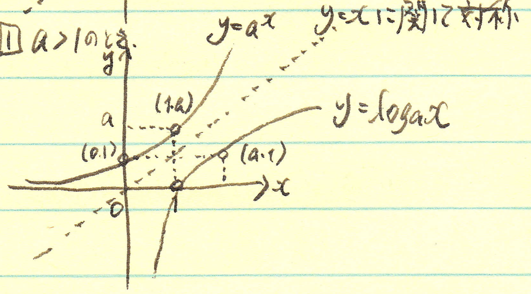
$a>0,\ a\neq1$ のとき
$$y=\log_a x$$
で表される関数を，a を底とする対数関数という。

対数は指数関数を使って定義しました。指数関数は底 a の値によって 2 種類ありました。
だから，対数関数も a の値によって形が 2 種類でできます。

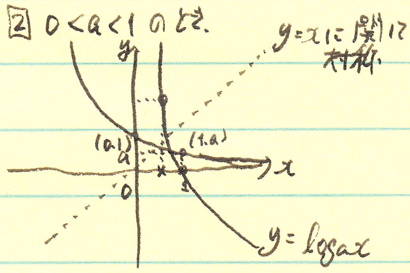
① $a>1$ のとき



① $a>1$ のとき



② $0<a<1$ のとき



対数関数の性質をまとめると，次のようになります。

(1) 定義域は正の実数全体，値域は実数全体
(2) グラフは点 $(1,0)$，$(a,1)$ を通る
(3) $a>1$ のとき　$0<p<q \Longleftrightarrow \log_a p<\log_a q$
　　$0<a<1$ 〃　$0<p<q \Longleftrightarrow \log_a p>\log_a q$