線形代数学 II　定期試験問題

理学部・農学部

担当 生田卓也

試験実施日 2012 年 2 月 9 日

解答は別紙答案用紙に書いてください。

$\boxed{\text{I}}$ 次の写像は線形写像かどうか判定しなさい．また，その理由を簡潔に書きなさい．

(1) $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1,\ f(x) = 2x - 1.$

(2) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f(x) = 0.$

$\boxed{\text{II}}$ 次の線形写像の指定された基底に関する表現行列を求めなさい．

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5x + y \\ 2x + 4y \end{bmatrix};$　基底 $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$

(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2y + z \\ x - 4y \\ 3x \end{bmatrix};$　基底 $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.$

$\boxed{\text{III}}$ 次の順列の転倒数と符号を求めなさい．

(1) $(2,\ 7,\ 4,\ 5,\ 6,\ 3,\ 8,\ 1).$

(2) $(n,\ n-1, \dots, 2,\ 1).$

$\boxed{\text{IV}}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$ が正則行列になるための x の条件を求めなさい．

$\boxed{\text{V}}$ 次の行列の固有値・固有空間の基底と次元を求めなさい．

(1) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$

$\boxed{\text{VI}}$

(1) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ のとき，$A^{100} + 3A^{23} + A^{20}$ を求めなさい．

(2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ のとき，A^{1000} を求めなさい．

$\boxed{\text{VII}}$ A を n 次正方行列とする．このとき A が対角化可能であるための必要十分は何であるかを書きなさい．

$\boxed{\text{VIII}}$ A を n 次正方行列とする．このとき，A が n 個の相異なる固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を持つなら，$\mathbb{R}^n$ の任意のベクトルは 固有空間 $W_{\lambda_1}, \ldots, W_{\lambda_n}$ の元を使って唯一通りに書けることを証明しなさい．