神戸大学 線形代数学II 中間試験問題 2011/12/22

I

線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 8x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

で定義される写像とする。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) $\mathbb{R}^3$の標準基底に関するfの表現行列Fを求めなさい。

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 8x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

この行列が
標準基底に関する表現行列である。

$$\therefore F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) Fの行基本変形による簡約化行列Gを求めなさい。
また、$G = QF$を満たす行列Qを求めなさい。

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 - r_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 + 3r_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \times (-1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 - 3r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E = G$$

Fの行基本変形による簡約化行列は単位行列Eである。
ということは、$G = QF$を満たすQはFの逆行列である。

$$Q = A^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 3 & 8 \\ 7 & -1 & -2 \\ 9 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

(3) Fの標準形をH、Qを(2)で求めた行列とする。
$H = QFP$とおく。このとき、Hは$\mathbb{R}^3$のどの基底に関する表現行列であるかを求めなさい。

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3\text{の標準基底 } e_1, e_2, e_3 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "E = P"'] & \mathbb{R}^3\text{の標準基底 } e_1, e_2, e_3 \arrow[d, "Q^{-1}"] \\ \boxed{\mathbb{R}^3\text{の別の基底}} \arrow[r, "H = QFP"'] & \boxed{\mathbb{R}^3\text{の別の基底}} \end{tikzcd}$$

単位行列

$\dashrightarrow e_1, e_2, e_3$

$$\cancel{\begin{bmatrix} -24 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}}, \cancel{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}, \cancel{\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$H : \{e_1, e_2, e_3\} \to \left\{ \cancel{\begin{bmatrix} -24 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}}, \cancel{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}, \cancel{\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}} \right\}$$

II

次の線形写像の像と核の基底を求めなさい。

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

簡約化行列

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 + r_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - 2r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 - r_2]{} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \times (-1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$e_1 \quad e_2$

$\to \mathrm{Im}\, f$ の基底は $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

簡約化行列より

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 \end{cases} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c_1, c_2は任意の実数)

III 次の行列式の値を求めなさい!

$$\begin{vmatrix}1&-2&3&-4\\2&-1&4&-3\\2&3&-4&-5\\3&-4&5&6\end{vmatrix}\underset{r_3-r_2}{=}\begin{vmatrix}1&-2&3&-4\\2&-1&4&-3\\0&4&-8&-2\\3&-4&5&6\end{vmatrix}\underset{r_4+r_3}{=}\begin{vmatrix}1&-2&3&-4\\2&-1&4&-3\\0&4&-8&-2\\3&0&-3&4\end{vmatrix}\underset{r_1+r_4}{=}\begin{vmatrix}4&-2&0&0\\2&-1&4&-3\\0&4&-8&-2\\3&0&-3&4\end{vmatrix}\underset{r_1\times\frac{1}{2},\ r_3\times\frac{1}{2}}{=}\begin{vmatrix}2&-1&0&0\\2&-1&4&-3\\0&2&-4&-1\\3&0&-3&4\end{vmatrix}$$

$$\underset{r_2-r_1}{=}\begin{vmatrix}2&-1&0&0\\0&0&4&-3\\0&2&-4&-1\\3&0&-3&4\end{vmatrix}$$

$$\underset{r_4-3r_1}{=}\begin{vmatrix}1&-2&3&-4\\2&-1&4&-3\\2&3&-4&-5\\0&2&-4&18\end{vmatrix}\underset{r_2-2r_1,\ r_3-2r_1}{=}\begin{vmatrix}1&-2&3&-4\\0&3&-2&5\\0&7&-10&3\\0&\cancel{1}\ 2&\cancel{-2}\ -4&\cancel{9}\ 18\end{vmatrix}\underset{\text{第1列で展開}}{=}\begin{vmatrix}3&-2&5\\7&-10&3\\\cancel{1}\ 2&\cancel{-2}\ -4&\cancel{9}\ 18\end{vmatrix}\underset{r_1-r_3,\ r_2-r_3}{=}\begin{vmatrix}0&4&-22\\0&4&-60\\1&-2&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-22\\4&-60\end{vmatrix}$$

$= -240+88$

$\underline{-304}$

$$=2\begin{vmatrix}3&-2&5\\7&-10&3\\1&-2&9\end{vmatrix}\underset{r_1-3r_3,\ r_2-7r_3}{=}2\begin{vmatrix}0&4&-22\\0&4&-60\\1&-2&9\end{vmatrix}$$

$$=2\underbrace{\begin{vmatrix}4&-22\\4&-60\end{vmatrix}}_{\shortparallel}$$

$-240+88$

$\shortparallel$

-152

$= \underline{-304}$

$$\begin{array}{r}240\\-\ 88\\\hline 152\end{array}$$

IV

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}x&0&-x\\-2(x-1)&x&-(x-1)(x-2)\\2(2x-1)&-x&(2x-1)(x-2)\end{bmatrix}\qquad A^{-1}=\frac{1}{x^2}\hat{A}$$

次の行列の余因子行列を求めなさい!
またそれを用いて逆行列を求めなさい!

$$\begin{bmatrix}x-1&1&1\\0&2x-1&x-1\\-2&1&1\end{bmatrix}$$

$\tilde{a}_{ij}$ = Aの(i,j)余因子 $\overset{\text{def}}{=}$ 第i行と第j列を取り除いてできる n-1次正方行列 の行列式を $(-1)^{i+j}$ 倍した数.

$$\tilde{a}_{11}=\begin{vmatrix}2x-1&x-1\\1&1\end{vmatrix}=2x-1-x+1=x$$

$$\tilde{a}_{12}=-\begin{vmatrix}0&x-1\\-2&1\end{vmatrix}=-2(x-1)$$

$$\tilde{a}_{13}=\begin{vmatrix}0&2x-1\\-2&1\end{vmatrix}=2(2x-1)$$

$$\tilde{a}_{21}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$$

$$\tilde{a}_{22}=\begin{vmatrix}x-1&1\\-2&1\end{vmatrix}=x-1+2=x+1$$

$$\tilde{a}_{23}=-\begin{vmatrix}x-1&1\\-2&1\end{vmatrix}=-(x-1)-2=-x-1$$

$$\tilde{a}_{31}=\begin{vmatrix}1&1\\2x-1&x-1\end{vmatrix}=x-1-2x+1=-x$$

$$\tilde{a}_{32}=-\begin{vmatrix}x-1&1\\0&x-1\end{vmatrix}=-(x-1)^2$$

$$\tilde{a}_{33}=\begin{vmatrix}x-1&1\\0&2x-1\end{vmatrix}=(x-1)(2x-1)$$

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}x&-2(x-1)&2(2x-1)\\0&x+1&-(x+1)\\-x&-(x-1)^2&(x-1)(2x-1)\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}x&0&-x\\-2(x-1)&x+1&-(x-1)^2\\2(2x-1)&-(x+1)&(x-1)(2x-1)\end{bmatrix}$$

$$A\hat{A}=\begin{bmatrix}x-1&1&1\\0&2x-1&x-1\\-2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0&-x\\-2(x-1)&x+1&-(x-1)^2\\2(2x-1)&-(x+1)&(x-1)(2x-1)\end{bmatrix}=x(x+1)E$$

$$\to A^{-1}=\frac{1}{x(x+1)}\tilde{A}$$

$x^2-(-2x+2+4x-2$

$=x^2+x$

V 正則行列 $F\in Mat_{n\cdot n}(\mathbb{R})$ に対して、線形写像 $f(x)=Fx$ が単射であることと全射であることは同値であることを証明しなさい!

単射 → 全射

$\boxed{Fx_1=Fx_2\ \text{なら}\ x_1=x_2}$

↓

$\boxed{Fx=0\ \text{なら}\ x=0}$

↓

$\operatorname{rank} F=n$

仮定

↓

F は正則行列

↓

~~$\forall x\in\mathbb{R}^n$, $Fx=y$ とおく~~ $x=F^{-1}y$ $\forall y\in\mathbb{R}^n$, $F^{-1}y=x$ とおくと

⇒ $Fx=y$

全射