2012年2月9日 実施

# 線形代数学 II　神戸大学 定期試験

1限目 理学部・農学部 K301
2限目 工学部 D414

## I 次の写像は線形写像かどうか判定しなさい。また、その理由を簡潔に書きなさい。

(1) $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1,\ f(x) = 2x - 1$

線形写像でない。
何故なら、定数項 ≠ 0 より

(2) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f(x) = 0$

線形写像

## II 次の線形写像の指定された基底に関する表現行列を求めなさい。

(1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5x+y \\ 2x+4y \end{bmatrix}$; 基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

f による基底の行き先を決めれば、
表現行列は完全に決まるから

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ 表現行列は $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

(2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2y+z \\ x-4y \\ 3x \end{bmatrix}$; 基底 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-6)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ 表現行列は $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

## III 次の順列の転倒数と符号を求めなさい。

(1) (2, 7, 4, 5, 6, 3, 8, 1)

2 − 1　①
7 − 4, 5, 6, 3, 1　⑤
4 − 3, 1　②
5 − 3, 1　②
6 − 3, 1　②
3 − 1　①
8 − 1　①

転倒数は 14 → 符号は $(-1)^{14} = 1$

(2) $(n, n-1, \cdots, 2, 1)$

$n - \boxed{n-1, \cdots, 2, 1}$　$n-1$ コ
$n-1 - \boxed{n-2, \cdots, 2, 1}$　$n-2$ コ
⋮
$2 - \boxed{1}$　1 コ

$$1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

sign = −1
↑
odd case
↑

$n = 4k$ なら $\dfrac{n(n-1)}{2} = 2k(2k-1)$

$n = 4k+1$ なら $\dfrac{n(n-1)}{2} = (4k+1)\cdot 2k$

$n = 4k+2$　$\dfrac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$

$n = 4k+3$　$\dfrac{n(n-1)}{2} = (4k+3)(2k+1)$

↓
even case
↓
sign = 1

## IV

$A = \begin{bmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$ が正則行列になるための $x$ の条件を求めなさい。

解答： 正則行列 $\overset{必要十分}{\Longleftrightarrow}$ $\det \neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+1 & x & x \\ 2x+1 & 1 & x \\ 2x+1 & x & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1}}{=} \begin{vmatrix} 2x+1 & x & x \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$C_1$ に $C_2, C_3$ を加える。

$$\underset{\substack{第1列で \\ 展開する}}{=} (2x+1)\cdot(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (2x+1)(1-x)^2$$

$x \neq -\frac{1}{2}, 1$ であれば

$\det(A) \neq 0$ より このとき正則行列である。

## V

次の行列の固有値・固有空間の基底と次元を求めなさい。

(1) $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 3 \\ -1 & -\lambda & -3 \\ 1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{r_1 + r_2 \\ r_3 + r_2}}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ -1 & -\lambda & -3 \\ 0 & -\lambda-2 & -\lambda-2 \end{vmatrix} \underset{c_2 - c_1}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda+1 & -3 \\ 0 & -\lambda-2 & -\lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{c_2 - c_3}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda+4 & -3 \\ 0 & 0 & -\lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2(-\lambda-2)$$

→ 固有値は $4$ と $-2$

重複度2　　重複度1.

□ 固有値4のとき.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \times (-\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 - 4r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

済

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

固有値4に対する固有空間は

$$W_4 = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \ c \in \mathbb{R} \right\}$$

$\dim W_4 = 1$

□ ~~本~~固有値 $-2$のとき.

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+r_3} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-7r_3} \begin{bmatrix} 0 & 18 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\times\frac{1}{18}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3+2r_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

固有値$-2$に対する固有空間は

$$W_{-2} = \left\{ c \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim W_{-2} = 1$$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{r_1-r_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1+\lambda \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda) - (-1+\lambda) - (1-\lambda)$$

$$= -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda) + (1-\lambda) - (1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\left(-(2-\lambda)(1+\lambda) + 1 - 1\right)$$

$$= -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda)$$

$\longrightarrow$ 固有値は $1, -1, 2$

□ 固有値$1$のとき

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$W_1 = \left\{ c \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim W_1 = 1$$

□ 固有値$-1$のとき.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W_{-1} = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim W_{-1} = 1$$

□ 固有値 $2$のとき.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W_2 = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim W_2 = 1$$

$\boxed{\text{VI}}$ (1) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ のとき.

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(2-\lambda)+5$$
$$= -(4-\lambda^2)+5$$
$$= \lambda^2+1$$

$$\therefore A^2 = -E$$

$$A^{100} = (A^2)^{50} = (-E)^{50} = E$$
$$A^{23} = A^{22} \cdot A = (-E)^{11} \cdot A = -A$$
$$A^{20} = (-E)^{10} = E$$

$$\therefore A^{100} + 3A^{23} + A^{20} = E - 3A + E = -3A + 2E$$
$$= \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 15 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 15 & -4 \end{bmatrix}$$

(2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ のとき.

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -3-\lambda & -2 \\ -1 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \underset{r_2+r_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 1-\lambda \\ -1 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2(3-\lambda) - 2\lambda + 3\lambda(1-\lambda)$$
$$= 3\lambda^2 - \lambda^3 - 2\lambda + 3\lambda - 3\lambda^2$$
$$= -\lambda^3 + \lambda$$

$$-A^3 + A = O$$
$$A^3 = A \quad \longrightarrow \quad (A^3)^{333} = A^{333}$$

$$A^{1000} = A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{VII}}$ $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$

$A$ が対角化可能 $\underset{\text{必要十分}}{\Longleftrightarrow}$ $A$の異なる固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$

重複度 $n_1 \quad n_r$

$\dim W_{\lambda_i} = n_i \quad \forall i = 1, \dots, r$

$\boxed{\text{VIII}}$ $A$が異なる$n$個の固有値をもつ.

$\rightarrow$ $n$個の1次独立な固有ベクトルをもつ.

$\rightarrow$ これらは$\mathbb{R}^n$の基底