式はわかり易い形をしているけど、
いざ計算するとなると複雑だから例をやって理解してもらう。

例題9

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

この行列式を2つの展開で計算してみる.

□ 第2行に関して展開してみると

$$|A| = \underset{7は(2\cdot1)成分}{7}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \underset{2は(2\cdot2)成分}{2}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \underset{8は(2\cdot3)成分}{8}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -7\cdot 20 + 2\cdot 8 - 8(2-15)$$
$$= -140 + 16 - 8(-13)$$
$$= -140 + 16 + 104$$
$$= -36 + 16$$
$$= -20$$

□ 第3列に関して展開してみると

$$|A| = 0\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 8(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 8(2-15) + 4\cdot(4-35)$$
$$= -8(-13) + 4(-31)$$
$$= 104 - 124$$
$$= -20$$

それでは定理12の証明を考えてみましょう。
(1)のみ証明します. (2)は(1)と同じように証明できます.

Aの第i行を次のようにn個の行ベクトルの和で表します.

$$[a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in}] = [a_{i1}\ 0 \cdots 0] + [0\ a_{i2}\ 0 \cdots 0] + \cdots + [0 \cdots 0\ a_{in}]$$

この計算を行列式に当てはめると

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\substack{行列式の性質\\[\mathrm{I}]\\を使う.}}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\substack{\| \text{ 定理11より} \\ \underbrace{a_{i1}(-1)^{i+1}\left|\substack{n-1\\次行列式}\right|}_{\tilde{a}_{i1}}}} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}\tilde{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}$$

次に余因子行列を定義します。
行列式を考えたいから最初に正方行列を取ってくる

$A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ とします。

この行列 A に対して、$\hat{A} \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ を次のように定義します。

$$\hat{A}_{ij} = \tilde{a}_{ji}$$

（$\hat{A}$ の (i,j) 成分を $\hat{a}_{ji}$ で定義している）
i と j がひっくり返っていることに注意してください。

$\hat{A}$ は成分が余因子からなるから、$\hat{A}$ を A の<u>余因子行列</u>という。

例えば、

<u>例題10</u>　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ のとき、

$$\underset{\sim}{\tilde{a}_{11}} = 4, \quad \tilde{a}_{12} = -3, \quad \tilde{a}_{21} = -2, \quad \tilde{a}_{22} = 1$$

A の i 行 j 列を取り除いて
$(-1)^{i+j}$ をかけて…
という操作が余因子だった。

<u>転置を取っている理由</u>

$$\longrightarrow \hat{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

これが
A の余因子行列 $\hat{A}$ です。

A も $\hat{A}$ も同じ行列サイズだから、掛け算ができます。
試しに A と $\hat{A}$ をかけてみると

$$A\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2\underbrace{E}_{\text{単位行列}}$$

単位行列が出てきた。

この単位行列の係数は何に一致しているかというと、
$|A| = -2$ です。このことは一般的に成り立っていて
次の定理として紹介します。

<u>定理13</u>（余因子行列の性質）

$A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ ~~場合~~ が<u>正則行列</u>なら

$$A\hat{A} = \hat{A}A = |A|E$$

が成り立つ。このとき、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$