行列式の性質について幾つかの定理を紹介します。

定理8　$A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ とする。

A が正則行列 $\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\det A \neq 0$

証明：　B を A の行基本変形による簡約化行列とする。

すなわち、

$\exists Q \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ s.t. $B = \underset{\sim}{Q}A$

基本行列の積

正則行列

$\longrightarrow$ (※2) より $|B| = |QA| \underset{\uparrow}{=} |Q||A|$

(※2) を使う

$\Longrightarrow$ 向きの証明：

A は正則行列とする。 $\longrightarrow$ 定理6 を使うと、正則行列の簡約化行列は単位行列だったから $B = E$

$\longrightarrow$ 例題6 (1) から $|E| = 1$

$\longrightarrow$ $\underbrace{|B|}_{\substack{E \\ \| \\ 1}} = |Q||A|$

$\longrightarrow$ $|A| \neq 0$

$\Longleftarrow$ 向きの証明：

背理法で証明する。

すなわち、A は正則行列でないと仮定する。

定理6 から

$\boxed{A\text{の簡約化行列が }E\text{ なら、}A\text{は正則行列である。}}$

対偶

$\boxed{A\text{が正則行列でない なら }A\text{の簡約化行列は }E\text{ でない!}}$

$\downarrow$

$\mathrm{rank}(A) < n$

$\downarrow$

B に 0行が存在

$\downarrow$

行列式の基本的な性質 [II] (2) より

$|B| = 0$

$\underset{\substack{\| \\ 0}}{|B|} = \underset{\substack{\neq \\ 0}}{|Q|}|A|$

この部分は定理8の証明の前半でしている。

$\longrightarrow$ $|A| = 0$ でなければならない

今、何が証明できたかというと、

A が正則行列でない $\longrightarrow$ $|A| = 0$

もう一回対偶をとると

$\det(A) \neq 0$ $\rightarrow$ A は正則行列 □

定理9. (行列の積の行列式)

$A, B \in Mat_{n \cdot n}(\mathbb{R})$

$$|AB| = |A||B|$$

が成り立つ。

証明: C を A の簡約化行列とする。

すなわち

$\exists Q \in Mat_{n \cdot n}(\mathbb{R})$ s.t. $C = QA \to \underline{A = Q^{-1}C}$

正則行列

代入

$$|AB| = |Q^{-1}CB| = |Q^{-1}||CB|$$

(※2)を使う

□ Aが正則行列なら、定理6より $C = E$, $Q^{-1} = A$

$$|AB| = |\underbrace{Q^{-1}}_{\shortparallel \atop A}||\underbrace{CB}_{\shortparallel \atop B}| = |A||B|$$

△ Aが正則行列でないなら、

○ 定理8より $|A| = 0$

○ 定理8の証明の後半と同じく

$\operatorname{rank}(A) < n$

$\to$ Cの最後の行は0行ベクトル

$\to$ CBの最後の行も0行ベクトル
(行列の掛け算の定義から)

$\to |CB| = 0 \to |AB| = 0$

$$|\underbrace{AB}_{\shortparallel \atop 0}| = |Q^{-1}||\underbrace{CB}_{\shortparallel \atop 0}|$$

$$\underbrace{|AB| = 0, \quad |A||B|}= 0 \cdot |B| = 0$$

両者に0だから

とにかく $|AB| = |A||B|$ が成り立つ。

定理10（転置の行列式）

$A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$

$|A^T| = |A|$

が成り立つ。

このことが成り立つと、

44頁の[I]、[II]（1）、（2）、（3）は列についても成り立つ

これまでもこれからも、行について成り立つことは、列についても成り立つ

証明：□ Aが正則行列なら、

定理7なら $A = \underbrace{P_1 \cdots P_r}_{基本行列}$

$$|A^T| = |(P_1 \cdots P_r)^T| \underset{\substack{\uparrow \\ 行列の転置の性質}}{=} |P_r^T \cdots P_1^T| \underset{\substack{\uparrow \\ 定理9}}{=} |P_r^T| \cdots |P_1^T|$$

$P_1, \cdots, P_r$は基本行列

○ $\left.\begin{matrix} P_i(c) \\ P_{ij} \end{matrix}\right\}$ は対称行列 → $\left.\begin{matrix} P_i(c) = P_i(c)^T \\ P_{ij} = P_{ij}^T \end{matrix}\right\}$ → 行列として等しいから当然行列式として等しい

○ 問題になるのは、

$$|P_{ij}(c)^T| = |P_{ji}(c)| = 1 = |P_{ij}(c)|$$

$$= |P_r| \cdots |P_1|$$

$$= |P_1| \cdots |P_r|$$

$$= |P_1 \cdots P_r| = |A|$$

□ Aが正則行列でないなら、

A^Tも正則行列でない

→ 定理8より $|A| = |A^T| = 0$

今、次の行列式を考えてみる。

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}}_{n\text{次正方行列}} = \sum_{\substack{\sigma:\{1,\dots,n\}\text{上の}\\ \text{すべての置換}}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

1行目の$(1,\sigma(1))$成分をみている。
行列の形から
$\sigma(1)=1$
を満たすσしか残らない。
ということは、σは$\{1,\dots,n\}$上の置換だったが、
$\sigma(1)=1$の条件の下で
$\{2,\dots,n\}$
~~までの~~ 上の置換全体を動けばよい！

$$= a_{11} \sum_{\substack{\sigma':\{2,\dots,n\}\text{上の}\\ \text{すべての置換}}} \mathrm{sgn}(\sigma')\, a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$(n-1)$次正方行列に制限できる。

このことを一般的に扱ったのが次の定理である。

定理11（次数を下げる一般公式）

(1) $$\begin{vmatrix} A & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & B \\ * \cdots * & a_{ij} & * \cdots * \\ C & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & D \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

(2) $$\begin{vmatrix} A & \begin{matrix}*\\ \vdots\\ *\end{matrix} & B \\ 0 \cdots 0 & a_{ij} & 0 \cdots 0 \\ C & \begin{matrix}*\\ \vdots\\ *\end{matrix} & D \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$

証明 (1) step 1

第i行を第1行に移す。
ただし、A,Bという行列の形を保持~~(判読不能)~~する必要があるから、
1行ずつ移動する必要がある。
そのためには$(i-1)$回の操作が必要である。

$$\begin{vmatrix} A & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & B \\ * \cdots * & a_{ij} & * \cdots * \\ C & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & D \end{vmatrix} \xrightarrow[i-1\text{回}]{} (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} * \cdots * & a_{ij} & * \cdots * \\ A & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & B \\ C & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & D \end{vmatrix}$$

step 2

Eの右側の行列まで
第j列を第1列に移す

$$\begin{vmatrix} * \cdots * & a_{ij} & * \cdots * \\ A & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & B \\ C & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & D \end{vmatrix} \xrightarrow[j-1\text{回}]{} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & * \cdots * & * \cdots * \\ \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & A & B \\ \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & C & D \end{vmatrix}$$

最初から考えると

$$\begin{vmatrix} A & 0 & B \\ * \cdots * & a_{ij} & * \cdots * \\ C & 0 & D \end{vmatrix} = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & * & * \\ 0 & A & B \\ 0 & C & D \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$$ となる。

(2)も同様

例題7

(1)

(2)

§3. 行

例

定理12

A

例題7

(1)
$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{c_2+c_3}{=\!=} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{定理11}}{=} (-1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \underset{r_1+r_3}{=\!=} - \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -(-2)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -44$$

この操作では
行列式は変わらない。
行列式の基本的性質[II](3)

(2)
$$\begin{vmatrix} a & & b \\ & \ddots & \\ b & & a \end{vmatrix} \underset{\substack{c_1+c_i \\ (2 \le i \le n)}}{=\!=} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & & b \\ a+(n-1)b & a & \\ \vdots & & \ddots \\ a+(n-1)b & b & a \end{vmatrix} \underset{\substack{r_i-r_1 \\ (2 \le i \le n)}}{=} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

§3. 行列式の展開

最初に余因子を定義します

$n \geq 2$ とする.

$A \in Mat_{n \cdot n}(\mathbb{R})$

Aの第i行と第j列を取り除いてできる(n-1)次正方行列に $(-1)^{i+j}$ を掛けた行列式を

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} & & a_{1j} & & \\ & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & & \\ & & a_{nj} & & \end{vmatrix}$$

$\tilde{a}_{ij}$ を Aの(i,j)余因子という.

これを取り除く
(n-1)次正方行列.

例題8 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ の (2,3)余因子 $\tilde{a}_{23}$ は

$$\tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

定理12 (余因子展開)

$A \in Mat_{n \cdot n}(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ とする.
このとき、次が成り立つ.

(1) $|A| = a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}$ (第i行に関する展開という)

(2) $|A| = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}$ (第j列に関する展開という)