第4章 行列式

配付プリントを使って授業する.
工学部 11月
理学部・農学部 12月1日の授業

§1. 行列式の定義

行列式を定義する前に順列を教えます.

$(p_1,\cdots,p_n)$ … (10)

とかいたら 1からnまでの自然数が重複なく適当な順番で横一列に並んでいる ~~もの~~ 順列 とします.
重複はないから並んでいる数字の個数はnです.
nを順列の長さといいます.

例えば
長さ2の順列は $(1,2),(2,1)$ しかない.
長さ3の順列は $(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)$ の6通りです.
一般に長さnの順列は $n!$ です.

順列(10)の中で
$i<j$ であるにも関わらず $p_i>p_j$ とします.
このとき (10)において
p_iとp_jに転倒があるという言い方をします.
(10)における転倒の総数を転倒数と呼ぶことにします
転倒数は0以上の整数だから
特に0も偶数であることに注意して 偶数と奇数しかありません。
そこで 転倒数の個数が 偶数のとき 偶順列
〃 〃 奇数のとき 奇順列 と呼ぶことにします.

今考えている順列では, 偶順列と奇順列しかないから
順列の符号を定義しようと思います.

$\sigma=(p_1,\cdots,p_n)$ 順列
rを σの転倒数とします. このとき
$$\mathrm{sgn}(\sigma)=(-1)^r$$
とおいて, この値を順列の符号(sign)と呼ぶことにします。

例えば
$n=2$のとき, さっき黒板でかいたように 順列は$(1,2)$と$(2,1)$しかない.
$\sigma_1=(1,2)$のとき 転倒数$=0$ $\mathrm{sgn}(\sigma_1)=1$
$\sigma_2=(2,1)$のとき 転倒数$=1$ $\mathrm{sgn}(\sigma_2)=-1$

$n=3$のとき, 順列の個数は6個ある。だから表にまとめましょう

σ	転倒している箇所	転倒数		
(1.2.3)	なし	0	偶置換	$\mathrm{sgn}(\sigma)=1$
(2.3.1)	2-1, 3-1	2		
(3.1.2)	3-1, 3-2	2		
(1.3.2)	3-2	1	奇置換	$\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$
(3.2.1)	3-2, 3-1, 2-1	3		
(2.1.3)	2-1	1		

例題3 (隣りどうしを入れ替えた順列の転倒数)

転倒数 r の順列 $(P_1, \cdots, P_i, P_{i+1}, \cdots, P_n)$ で
P_i と P_{i+1} を入れ替えた順列の転倒数は

$P_i < P_{i+1}$ なら $r+1$

$P_i > P_{i+1}$ なら $r-1$

□ 元々 $P_i < P_{i+1}$ なら この2つの数字については転倒が起きていなかった。

$(P_1, \cdots, P_i, P_{i+1}, \cdots, P_n) \to (P_1, \cdots, P_{i+1}, P_i, \cdots, P_n)$

local な情報 ~~変化~~ の影響している.

○ $P_1, \cdots, P_{i-1}, \quad P_{i+2}, \cdots, P_n$

これら $n-2$ 個については 転倒数に変化はない。

○ $P_{i+1}, P_i, \quad P_{i+2}, \cdots, P_n$

この2つの部分について 転倒数に変化はない

○ P_{i+1}, P_i

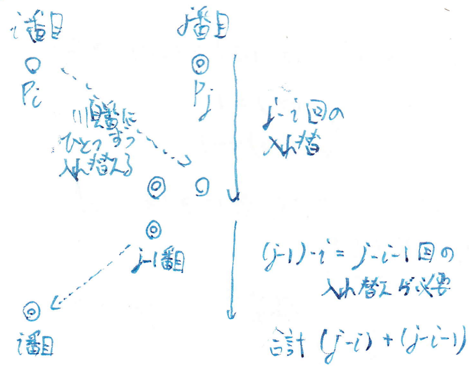
転倒が 1回起きている. +1される.

□ 元は $P_{i+1} > P_i$ なら. 同じ考察により
転倒数は 1個減って $r-1$ となる.

例題4

$(P_1, \cdots, P_i, \cdots, P_j, \cdots, P_n)$
が偶順列 (奇順列) なら P_i と P_j を入れ替えた
$(P_1, \cdots, P_j, \cdots, P_i, \cdots, P_n)$
は奇順列 (偶順列) である.

何故なら.



計 $(j-i)+(j-i-1) = 2(j-i)-1$ 回の入れ替えで P_i と P_j が入れ替わる。

この計算は何を言っていると思う？
例題3は 隣りどうしの数字の入れ替えの場合を扱った。
今度の例題4は、隣りどうしの数字の入れ替えの場合でなく、
ちょっと離れた 2つの数字の入れ替えの場合を考えている。
例題3は 隣りどうしの数字を入れ替えると 符号が変わった。
今の計算は i番目とj番目の数字を入れ替えるために、隣りどうしの数字を順番に入れかえていって
そのために total で $2(j-i)-1$ step 必要ということになった。この数は 奇数である。
だから、i番目とj番目の数字を入れ替えると 順列の符号が入れ替わるということになる。

この章のタイトルは行列式なのに、今のところ順列とその符号しか考えていない。
行列式の定義にどうして順列の符号が必要なのかを説明します。

2011/12/17 六甲道から朝霧 JRの中で

$\sigma = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ を順列とします。
この順列は $n!$ 通り考えることができます。
この順列を次のように数の置換と対応させます。

$$\sigma = \begin{pmatrix} \boxed{1 \ 2 \ \cdots \ n} \\ \boxed{p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n} \end{pmatrix}$$

1行目は必ず 1からnまでの数を順に並べます
この2行目は、順列σをそのまま埋め込めます。

と書いたら、iに対してp_iを対応させるという約束します。
注意してほしいのは、このσの(　)と書いたら行列を表してないということです。
順列は $n!$ 通りあったから、
この 1からnの置換も $n!$ 通りあるということになります。
すなわち

σ：順列が1つ与えられたら $\xleftrightarrow{\text{1対1に対応}}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 \cdots n \\ \boxed{\sigma} \end{pmatrix}$ 数の置換が1つ決まります。

これから行列式を定義します。
行列式は正方行列に対してのみ定義できます。

$A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ に対して

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ とおきます。

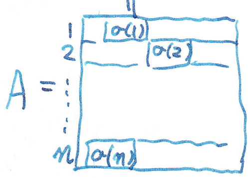
行列式の定義：

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma : \{1, \cdots, n\} \text{上のすべての置換}} \boxed{\underbrace{sgn(\sigma)}_{\text{順列の符号だから } \pm 1} \underbrace{a_{1\sigma(1)}}_{A\text{の}(1,\sigma(1))\text{成分}} \cdots \underbrace{a_{n\sigma(n)}}_{A\text{の}(n,\sigma(n))\text{成分}}} \in \mathbb{R}$$

determinant 行列式

これで1つのかたまり

実数の掛け算の和を計算しているから output は実数である。



各行から与えられたσに対して1つずつ成分を拾っていく。

例題5

(1) $n=2$ の場合を考える.
このとき順列の個数は 2つです.

○ $\sigma_1=(1,2) \longleftrightarrow \sigma_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$ という置換を対応させる.

この記号の意味は何だったかというと.
$\sigma_1(1)=1,\quad \sigma_1(2)=2$

この順列の転倒数は0より
$sgn(\sigma_1)=(-1)^0=1$

$\longrightarrow sgn(\sigma_1)\,a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)} = 1\cdot a_{11}a_{22} = a_{11}a_{22}$

○ $\sigma_2=(2,1) \longleftrightarrow \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ という置換を対応させる.

$sgn(\sigma_2)=(-1)^1=-1$

$\sigma_2(1)=2,\quad \sigma_2(2)=2$

$\longrightarrow sgn(\sigma_2)\,a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)} = -a_{12}a_{21}$

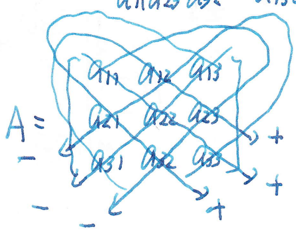
上の2つの計算より

$$\det A = \sum_{\sigma:\{1,2\}\text{上のすべての置換}} sgn(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} = sgn(\sigma_1)\,a_{1\sigma_1(1)}a_{2\sigma_1(2)} + sgn(\sigma_2)\,a_{1\sigma_2(1)}a_{2\sigma_2(2)}$$
$$= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

(2) $n=3$ とする.
このときの順列の個数は $3!=6$ です.
表にまとめて説明します.

σ	$\sigma_1=(123)$	$\sigma_2=(231)$	$\sigma_3=(312)$	$\sigma_4=(132)$	$\sigma_5=(321)$	$\sigma_6=(213)$
転倒数	0	2	2	1	1	3
$sgn(\sigma)$	1	1	1	-1	-1	-1
	$\sigma_1(1)=1$	$\sigma_2(1)=2$	$\sigma_3(1)=3$	$\sigma_4(1)=1$	$\sigma_5(1)=3$	$\sigma_6(1)=2$
	$\sigma_1(2)=2$	$\sigma_2(2)=3$	$\sigma_3(2)=1$	$\sigma_4(2)=3$	$\sigma_5(2)=2$	$\sigma_6(2)=1$
	$\sigma_1(3)=3$	$\sigma_2(3)=1$	$\sigma_3(3)=2$	$\sigma_4(3)=2$	$\sigma_5(3)=1$	$\sigma_6(3)=3$
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	$a_{11}a_{22}a_{33}$	$a_{12}a_{23}a_{31}$	$a_{13}a_{21}a_{32}$	$a_{11}a_{23}a_{32}$	$a_{13}a_{22}a_{31}$	$a_{12}a_{21}a_{33}$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$$



例題6 (1) $A=\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{bmatrix}$ の行列式を行列式の定義に従って計算しなさい。

$$\det A = \sum_{\sigma:\{1,\dots,n\}\text{上のすべての置換}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \underbrace{a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}$$

第2項に注目すると、
Aは対角行列だから
$\sigma(i)=i$
を満たすσしか残らない。
このσは恒等置換である。

$$= \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix}1\cdots n\\1\cdots n\end{pmatrix}\right) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= a_{11} \cdots a_{nn}$$

特に $\det E = 1$ である。

2011/12/17
JR 明石駅
コーヒーハウス
サンロード

(2) $A=\begin{bmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & \\ a_{n,1} & & 0\end{bmatrix}$ の行列式を行列式の定義に従って計算しなさい。

Aの nonzero な成分は、
$(1,n), (2,n-1), \dots, (n,1)$
である。これより、行列式の定義で残る $\{1,\dots,n\}$ 上の置換は
$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ n & n-1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$
である。こ~~れより~~

$$\det A = \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix}1\cdots n\\n\cdots 1\end{pmatrix}\right) a_{1n}\, a_{2,n-1} \cdots a_{n,1}$$

となる。だから、$\operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix}1\cdots n\\n\cdots 1\end{pmatrix}\right)$ ~~符号~~が決まればよい。

σを順列で表わすと
$\sigma = (n, n-1, \dots, 1)$
この順列の左から順に転倒がある個数を調べる。
- nは $n-1$ から 1 まで $(n-1)$ 個の数と転倒している。
- $n-1$ は $n-2$ から 1 まで $(n-2)$ 個の数と転倒している。

  ⋮
- 2 は 1 と 1個転倒している。

これから転倒数は
$$\underbrace{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}_{(n-1)\text{個ある。}} = \sum_{i=1}^{n-1} i = \boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$$
これが転倒数である。

この段階で、あくまでも転倒数が決まっただけで、
符号がexplicitに決まったわけでない。

n	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\operatorname{sgn}(\sigma)$
1	0	+
2	1	−
3	3	−
4	6	+
5	10	+
6	15	−
7	21	−
8	28	+

計算すると mod4 で扱い方が解釈できることがわかる。

$n=4k$ なら $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{4k(4k-1)}{2} = 2k(4k-1)$
$n=4k+1$ なら $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{(4k+1)4k}{2} = 2k(4k+1)$ } even
$n=4k+2$ なら $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{(4k+2)(4k+1)}{2} = \frac{16k^2+12k+2}{2} = 8k^2+6k+1$
$n=4k+3$ なら $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{(4k+3)(4k+2)}{2} = \frac{16k^2+20k+6}{2} = 8k^2+10k+3$ } odd

§2. 行列式の基本的性質

行列式の計算は、サイズnが大きくなると複雑になる。
例えば $n=4$ なら $4!=24$ 通り
　　　$n=5$ なら $5!=120$ 通り
計算しなければならない。だから、nが大きくなったとき、nより小さい行列式に制限できれば
計算が楽になる。これができるためには、行列式の性質を探る必要がある。
行列式はどのような性質を持っているのか調べる。

[I]
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a'_{i1}+a''_{i1} & \cdots & a'_{in}+a''_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a''_{i1} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第i行が2つの数の和になっているなら、
第i行だけを分解して2つの行列式の和で表される。

証明：

$$\text{左辺} = \sum_{\substack{\sigma:\{1,\dots,n\}\text{上の} \\ \text{すべての置換}}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots \underbrace{(a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)})} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$b_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ とおくと、
$b_{i,\sigma(i)}$ を取るということは、
$b_{i,\sigma(i)} = \underbrace{a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}}$
$((i,\sigma(i))$ 成分を pickup する)

$$= \sum_{\substack{\sigma:\{1,\dots,n\}\text{上の} \\ \text{すべての置換}}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a'_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$
$$+ \sum_{\substack{\sigma:\{1,\dots,n\}\text{上の} \\ \text{すべての置換}}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a''_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$
$$= \text{右辺}$$

[II] (1)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

これが証明できたとする。
$c \in \mathbb{R}$ という条件がついてるから、
$c=0$ とおくと、ある行が0行なら、行列式$=0$ ということがわかる。

$$\text{証明：左辺} = \sum_{\substack{\sigma:\{1,\dots,n\}\text{上の} \\ \text{すべての置換}}} \underbrace{\mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots (c a_{i\sigma(n)}) \cdots a_{n\sigma(n)}}_{n!\text{個のすべての項にcがついているから、cでくくると}}$$

$$= c \sum_{\substack{\sigma:\{1,\dots,n\}\text{上の} \\ \text{すべての置換}}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(n)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \text{右辺}$$

(2)
$$\begin{array}{r} \\ \\ i\text{行目}\rightarrow \\ \\ j\text{行目}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{行目} \\ \\ \leftarrow j\text{行目} \\ \\ \\ \end{array}$$

2つの行を入れ替えると、行列式の符号は変わる。

証明: 左辺 $= \displaystyle\sum_{\sigma:\{1,\dots,n\}\text{上のすべての置換}} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

σの定義は
$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \cdots i \cdots j \cdots n \\ \cdots \sigma(i) \ \sigma(j) \cdots \end{pmatrix}$
だったから、i行目に対してはσ(i)
j行目に対してはσ(j)
を施すという意味だった。

→ このことから、
$a_{j\sigma(i)}$ となる。
このjはi行目にある。

抽出する。

このσを順列のlevelで考えると
$\sigma = (\sigma(1) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(n))$
i番目　j番目
この2つを入れ替えたい

→ i番目とj番目を入れ替えると
$\sigma' = (\sigma(1) \cdots \sigma(j) \cdots \sigma(i) \cdots \sigma(n))$
この順列にするとsgnが変わる。

→ この順列を置換の形でかくと
$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ & & \sigma(j) & & \sigma(i) & & \end{pmatrix}$
埋め込む

すべてのσに対して
この操作を施すと、
一斉に符号が変わる。

$= \displaystyle\sum_{\sigma':\{1,\dots,n\}\text{上のすべての置換}} -sgn(\sigma')\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

↓ 各項で実数を並べる順番をかえる。

$= - \displaystyle\sum_{\sigma':\{1,\dots,n\}\text{上のすべての置換}} sgn(\sigma')\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

$=$ 右辺.

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ca_{i1} & \cdots & a_{jn}+ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

証明：

$$\text{左辺} \underset{\substack{\uparrow \\ [\mathrm{I}]\text{を使う.}}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ [\mathrm{II}]\ (1),(2) \\ \text{を使う.}}}{=} \text{右辺}$$

今、行列式の基本的性質として
[I]、[II] (1)、(2)、(3) の4つをしらべた。

↑ この3つに注目する。

[II](1) = 行基本変形の中で 第i行をc倍する。

(2) = 第i行と第j行を入れかえる

(3) = 第j行に第i行のc倍を加える

という 行基本変形と同じ操作を施していることがわかる。

行列式の定義からわかった3つの性質を書いておくと

[II] (1) $|P_i(c)A| = c|A|$

(2) $|P_{ij}A| = -|A|$

(3) $|P_{ji}(c)A| = |A|$

この3つの式は $\forall A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ に対して成り立つ。

そこで、特に $A=E$ (単位行列) とおく。

$|E|=1$ であることは 例題6(1)で解決済み

(1') $|P_i(c)| = c$

(2') $|P_{ij}| = -1$

(3') $|P_{ji}(c)| = 1$

基本行列の行列式が この段階でわかった

上の(1)、(2)、(3) は次のようにまとめることができる。

$P \in \{P_i(c), P_{ij}, P_{ji}(c)\}$ とすると

$$|PA| = |P||A| \quad \cdots\cdots (*1)$$

が成り立つ。そこで、次のことが成り立つ。

$P_1, \cdots, P_r$ を基本行列とすると、(*1)を使うと

$$|P_1 \cdots P_r A| = |P_1||P_2 \cdots P_r A| = \cdots = |P_1||P_2| \cdots |P_r||A|$$

正則行列Qは基本行列の積でかけていたから

$$|QA| = |Q||A| \quad \cdots\cdots (*2)$$

が成り立つ。

行列式の

定理8

証明