2012年5月17日(木)

線形代数学1　5回目の授業

前回やったことを受けて　5月17日　5回目の授業をしなければならない。

授業は継続性が必要である。

前回の授業の雰囲気をつかんで今回の授業をすることが重要。そうでないと、学生は何を勉強しているのかわからなくなるから。

前回は連立1次方程式の解が存在するなら、

係数行列のrankと拡大係数行列のrankの間にどのような関係が成り立つのかを見ました。

~~それは~~ その関係は、連立1次方程式の解が存在するなら、

係数行列のrankと拡大係数のrankは等しくなければならないということでした。

4回目の授業は、このことを目的にする必要がある。

前回は2つの例を見ました。

1つは連立1次方程式の解が存在しない例で、

他方は解が存在する例です。

特にこの例では、解を表すのに自由度が現れて、その自由度の個数は、変数の個数－rankで与えられていました。

今日は前回の授業の続きで、次の3つのことをしゃべります。

[1] 連立1次方程式が解をもつための必要十分条件がわかること。

[2] 連立1次方程式が唯1つの解をもつための必要十分条件がわかること。

[3] これら2つの結果を定数項が0である同次連立1次方程式の場合に応用して結果を得ること。

です。

次の定理が成り立ちます。

> 定理3．連立1次方程式 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ が解をもつための必要十分条件は
> $$\mathrm{rank}([A\,|\,\mathbf{b}]) = \mathrm{rank}(A)$$
> が成り立つことである。

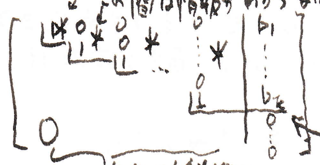
この証明を簡単に見ていきましょう。

□ 必要条件は先週黒板で考察した通りです。

□ 逆に $\mathrm{rank}([A\,|\,\mathbf{b}]) = \mathrm{rank}(A)$ が成り立っているとします。

このとき拡大係数行列はどのような形をしているかというと

この間は情報がわからないから、＊を付けています。



簡約化行列は、主成分に関する情報しかはっきりとわかっていません。

この部分が係数行列の簡約化行列で

この部分はこういう風になっています。

ここで r というのは、rank(A) です。

(r＝rank(A) です)

一番大きい行列を区切り線を無くして見た行列が拡大係数行列の簡約化行列です。

今、$\mathrm{rank}([A\,|\,\mathbf{b}]) = \mathrm{rank}(A)$ というのだから。

この簡約化行列から、

連立1次方程式の式を作って、次のように項を移項する。

$$\boxed{\text{主成分に対応する変数} = \underline{\text{主成分に対応しない変数で表される}}\text{式} + \text{定数項}}$$

これは黒板に書く。そして消さないような場所に書く。次頁の説明で使うから。

ここに現れる変数の個数は、主成分に対応する変数だから、rank(A)個の変数が現れる。

一方、ここに現れる変数の個数は、左辺で rank(A)個既に現れているから $(n-\mathrm{rank}(A))$ 個の変数があります。

こういう形で解を表すことができるから、解が存在することがわかります。

以上の ~~説~~ 証明から、定理3が成り立つことがわかります。

17 注意として、
先程黒板に書いたこの式で、

主成分に対応する変数 = $\underline{\text{主成分に対応しない変数で表わされる式}}$ + 定数項

主成分に対応する変数: rank(A)個

主成分に対応しない変数で表わされる式: (n − rank(A))個の変数がある。

$n - \mathrm{rank}(A) = 0$ なら、自由度がなくなります。

このとき、

主成分に対応する変数 = 定数項

という式になって、

左辺は $n = \mathrm{rank}(A)$ より n 個の変数が現れて、
それがすべて定数項に等しいという式が出てくるから、
このとき、解が唯一通りだとわかります。
このことをまとめると、次の定理が成り立ちます。

> **定理4.** $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とする。
> 連立1次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対して
> (1) 解 $\boldsymbol{x}$ が唯一通りに存在 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}([A|\boldsymbol{b}]) = \mathrm{rank}(A) = n$
> (2) $n > \mathrm{rank}([A|\boldsymbol{b}]) = \mathrm{rank}(A)$ なら、
> 解は無限通り存在する。
> このとき、解は $(n - \mathrm{rank}(A))$ 個の自由度をもつ

この証明ですが、

(1) □ もし解が唯一通りに存在するなら、
拡大係数行列の簡約化行列は

$$\begin{array}{cc} & n \\ n & \left[\begin{array}{c|c} E & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \\ O & O \end{array}\right] \end{array}$$

という形でなりません。

この部分は下に幾ら伸びていたとしても、
それは解が唯一通りであるにも関わらず重複した連立1次方程式が現れているということだから、
下に伸びていても構いません。
とにかく大切なことは、
解が唯一通りしかないということは、
変数の個数分のサイズをもつ単位行列が現れるということだから、
上の簡約化行列の形になっていることがわかります。
このことから、$\mathrm{rank}(A) = n$ で、解が存在することから $\mathrm{rank}([A|\boldsymbol{b}]) = \mathrm{rank}(A)$ が成り立っています。

□ (1)の $\Leftarrow$ 向きの証明は、定理4を書く前に書いた通りです。

(2) については、既に解説しています。

定理4からわかる応用を考えます。
連立1次方程式の係数行列 A のサイズを $m \times n$ とします。
すなわち $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とします。

$m < n$ と仮定します。A が横長の行列を考えている。

定理2から $\mathrm{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$ だったから、

$\mathrm{rank}(A) \leq m < n$ となります。

このとき、定理3を満たすなら、
定理4から解は無限に多く存在することがわかります。

次に特別な連立1次方程式の場合を考えます。
それはベクトル$\mathbb{b}=\mathbb{0}$の場合です。

$A\boldsymbol{x}=\mathbb{0}$の形の連立1次方程式を<u>同次連立1次方程式</u>といいます。
この連立1次方程式は定理3や定理4に出てきた連立1次方程式の特別な形をしています。
特別だからこそ、幾つかの特殊なことが成り立ちます。線形代数学では、$\mathbb{b}\neq\mathbb{0}$の連立1次方程式より
$\mathbb{b}=\mathbb{0}$の同次連立1次方程式の方が重要です。このことは後の授業で出てきます。

$A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$とします。
$A\boldsymbol{x}=\mathbb{0}$という同次連立1次方程式を考えます。
Aのサイズがmとnであることから、
$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbb{0}\in\mathbb{R}^m$がわかります。
この方程式は常に解$\boldsymbol{x}=\mathbb{0}\in\mathbb{R}^n$を持っています。
この解を<u>自明な解</u>(trivial)といいます。
自明な解は常に存在するから、同次連立1次方程式を考えるときは、自明でない解、すなわち<u>非自明な解</u>(nontrivial)に興味があります。

□ 連立1次方程式を解くときは拡大係数行列を作って、そこから行基本変形を施こして~~解を~~簡約化することにより解を求めていました。
ところが今は$\mathbb{b}=\mathbb{0}$だから
$[A|\mathbb{0}]$とAは本質的に同じものです。
何故なら、Aの右側に0ベクトルを幾ら追加しても連立1次方程式を解くときに
影響はないからです。
だから、$\mathrm{rank}([A|\mathbb{0}])=\mathrm{rank}(A)$は常に成り立ちます。
従って、同次連立1次方程式の場合は、定理3に常に成り立ちます。
同次連立1次方程式を考えているときは、定理3は意味がない。

□ 定理4を同次連立1次方程式に適用すると、
次の定理が得られます。

> 定理5. $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$とする。
> $A\boldsymbol{x}=\mathbb{0}$が自明な解に限る $\overset{\Longrightarrow}{\underset{必要十分}{\Longleftarrow}}$ $\mathrm{rank}(A)=n$

この定理は定理4から~~…~~ただちに出てきます。

~~…~~
今から、同~~…~~次連立1次方程式が何時非自明な形をもつかを係数行列のサイズを~~…~~中心に
考えてみます。

$A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$とする。
定理2から、$\mathrm{rank}(A)\leq\min\{m,n\}$です。
Aのサイズについて、次の3つの場合分けをします。

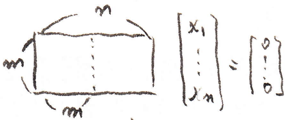
I $m=n$なら
すなわちAが正方行列の場合を考えている。
□ $\mathrm{rank}(A)=n$なら、
すなわちAがn次正方行列で$\mathrm{rank}(A)=n$ということだから、
Aの簡約化行列は単位行列です。
定理5から自明な解しか出てきません。
□ $\mathrm{rank}(A)<n$なら、
Aがn次正方行列で$\mathrm{rank}(A)<n$ということから、
Aの簡約化行列は

$$\begin{bmatrix} 1\ 0\ 1 & \vdots \\ & 0 \\ 0 & \end{bmatrix}$$

これら主成分の個数はnより小さい。
という形です。今日何回か既に見たように、このとき、$(n-\mathrm{rank}(A))$個の自由度が(解に)現れて、
非自明な解をもちます。

$\boxed{2}$ $m<n$ なら、

同次連立1次方程式の形は

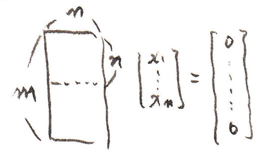


となっていて、定理2から $\mathrm{rank}(A) \leqq m \; (<n)$ です。

ということは 定理4の(2)から 非自明な解をもちます。

$\boxed{3}$ $m>n$ なら

同次連立1次方程式の形は



定理2から、$\mathrm{rank}(A) \leqq n$ です。

□ $\mathrm{rank}(A)=n$ なら 定理5より 自明な解をもつ。

□ $\mathrm{rank}(A)<n$ なら、定理4(2)から 非自明な解が存在します。

以上、$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ をまとめると

> 定理6. $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とする。
>
> (1) $m<n$ なら、$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は非自明な解をもつ。
> これは$\boxed{2}$の場合を考えている
>
> (2) $m \geqq n$ とする。このとき
> $\mathrm{rank}(A)=n$ なら、$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は自明な解のみもつ
> $\mathrm{rank}(A)<n$ なら $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は非自明な解をもつ。

この後に 演習問題5 をやる。

□ 2012/05/17 理学部 演習時間は35分
工学部 〃 40分
工学部の学生は 2/3位はできていたが、
理学部はどうかな? あまりできていないかな?
それはTAの結果を見てから。

□ もう少し量を減らしてよいかもしれない。
このノートは 2012/05/17 の授業でしゃべった内容より詳しく書いているから。
~~問題~~ 2問だけでよいかもしれない。
解答は最後に配布した方がよい。