2012年5月10日(木)

線形代数学1　4回目の講義

3回目の授業の最後に演習問題3をやった。
簡約化行列を求める問題であるが、あまり出来ていなかった。
それでGW中に問題を作り直してマークシート形式で出した。それが演習問題4である。
理学部・工学部共に40分間 演習問題4をやらせる。
解答用紙は最後に配布して、自分で解答させる。
40分以上演習すると今後は授業がきつくなる。

前回は掃き出し法を知ること、
　　簡約化行列とrankの定義を知ること、
がmainでした。今日の授業は連立1次方程式を解くということが目標です。

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とします。

このとき、

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b} \quad \cdots ⑧$$

という連立1次方程式を考えます。
この⑧式からわかることは、
Aの行列サイズがわかれば、$\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{b} \in \mathbb{R}^m$ だということがわかります

~~実際~~ 前回話しをした通り、掃き出し法で解くときは最初に拡大係数行列を作りました。

⑧から $[A|\mathbb{b}]$ を作った。$\in M_{m,n+1}(\mathbb{R})$ でした。この行列サイズは

このとき、$\mathrm{rank}([A|\mathbb{b}])$ はどう~~な~~なるだろうか？ということを考えたい。
rankの定義から、~~零ベクトル~~零行ベクトルでない個数がrankだったから、
拡大係数行列は係数行列に1つの列ベクトルを加えただけだから、

$\mathrm{rank}([A|\mathbb{b}]) = \mathrm{rank}(A)$ となるか $\mathrm{rank}([A|\mathbb{b}]) = \mathrm{rank}(A)+1$

のどちらかです。例えば、$\mathrm{rank}([A|\mathbb{b}]) = \mathrm{rank}(A)+1$ なら $[A|\mathbb{b}]$ の~~拡大係数~~行列は（簡約化行列）どのような形をしているかというと

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & * & 0 & * & 0 & * & b_1 \\ & & 1 & & \vdots & & \vdots \\ & & & & 0 & & \\ & & & & 1 & & b_r \\ O & & * & & & & b_{r+1} \end{array}\right]$$

となっています。

これらの部分は必要ないから*です。

左下の成分はすべて0です。

~~拡大~~ 簡約化行列は主成分についての情報しか言っていないから。

この簡約化行列は、この形になることがわかります。だから、これが $\mathrm{rank}([A|\mathbb{b}]) = \mathrm{rank}(A)+1$ の場合であって、拡大係数行列のrankが $\mathrm{rank}(A)$ より大きいとしても高々1つしか大きくならない理由がわかったと思います。

実際は $b_1 = \cdots = b_r = 0$ で $b_{r+1} = 1$ です。

もし、

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ & 1 & 0 & & & \vdots \\ & & 1 & & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & 1 & b_r \\ & O & & & & b_{r+1} \\ & & & & & b_{r+2} \end{array}\right]$$

この部分が2つあるなら、
b_{r+2} は b_{r+1} を使って、
すなわち、r+2行目は r+1行目を使うことによって
$b_{r+2} = 0$ にできるから。

この簡約化行列から何がわかるか？
(r+1)行目を見ると
区切り線の左側は　　　区切り線の右側

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b_{r+1}$$

$$\underline{0 = b_{r+1} = 1}$$

これは矛盾です。
ということは $\mathrm{rank}([A|\mathbb{b}]) = \mathrm{rank}(A)$ になることはないということです。

□ 次に rank([A|b]) = rank(A) なら どういうことが起こっているのかを見てみましょう。

$$
\begin{array}{cccccc}
x_{i_1} & x_{i_2} & x_{i_3} & \cdots & x_{i_r} & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & * & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\
 & 1 & * & & & \vdots \\
 & & 1 & & * & \\
 & & & \ddots & & \\
 & & & & 1 & b_r \\
 & 0 & & & & 0 \\
 & & & & & \vdots
\end{array}\right]
$$

ここに主成分が現れています

この主成分に対応する変数を $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_r}$ とおきます。

零行ベクトルでない行の個数が

拡大係数行列と係数行列で等しい場合です。

この簡約化行列を連立1次方程式の形で書いて、

項を移項すると、

ここには rank(A) = r 個の変数があって、

$$
\left\{\begin{array}{l}
x_{i_1} = \boxed{} + b_1 \\
x_{i_2} = \boxed{} + b_2 \\
\vdots \\
x_{i_r} = \boxed{} + b_r
\end{array}\right.
$$

ここは $x_1, \cdots, x_n$ から

$x_{i_1}, \cdots, x_{i_r}$ を取り除いた変数のみで

表される式が現れます。

ここには、変数の個数から rank(A) を引いた個数

(n − rank(A)) 個の変数が現れています。

これは、左辺の r 個の変数が

右辺の (n − r) 個の変数を使って

表されているということだから、

連立1次方程式が解けたことになっています。

だから、rank(A) = rank([A|b]) なら、

入れ替える

連立1次方程式は必ず解ける ことを

言っています。

今説明したことは一般論なので、具体例をやることによって、

理解を深めてもらいます。

例題2. 次の連立1次方程式を解きなさい!

(1)
$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
2 & 1 & -1 & 0 & -3
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 \\ -2 \\ 3 \\ 1
\end{bmatrix}
$$

拡大係数行列は

ここに主成分の候補となる1がある。これを主成分にするには

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
2 & 1 & -1 & 0 & -3 & 1
\end{array}\right]
\xrightarrow[r_4 - 2r_1]{r_3 + r_1}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1
\end{array}\right]
\xrightarrow{r_4 - r_1}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

この2つを0にすればよい!

係数行列を見ると

零行ベクトルでない行ベクトルの個数 = 3

拡大係数行列を見ると

零行ベクトルでない行ベクトルの個数 = 4

だから 解は存在しない。

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - 2r_1]{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - r_2]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 - r_3]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right]$$

これは簡約化行列である。

これを式で表すと

$$\begin{cases} \boxed{x_1} - 2x_2 + 3x_4 = 2 \\ \boxed{x_3} - x_4 = -1 \\ \boxed{x_5} = 1 \end{cases}$$

x_1, x_3, x_5 は主成分に対応する変数である。
だから先程黒板で説明した通り

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_4 + 2 \\ x_3 = x_4 - 1 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

これをよりベクトルで表すと

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall c_2, c_4 \in \mathbb{R}$$

x_2 に対応する ~~変数~~ 定数　　x_4 に対応する ~~変数~~ 定数

この表示を見ると c_2, c_4 は何でもいいから、
無限に多くの解が存在することがわかります。
何故2個のパラメータが現れたかというと、
変数の個数 − rank = 5 − 3 = 2個だから。