第3章
H21 ガイドラインでは4回で終わらせることになっている。

第3章 連立1次方程式の掃き出し法による解法

次の連立1次方程式を考えてみます。

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
\quad \cdots ①
$$

式はm個あって、変数は$x_1 \cdots x_n$のn個です。その他の記号はすべて定数です。
このような連立1次方程式を解きたいのです。
今から どんな連立1次方程式でも必ず解ける方法を伝えます。

それは代入法という手法でなく、
第3章のタイトルにもある掃き出し法と呼ばれる手法です。
方程式というのだから、$x_1, \cdots, x_n$のn個の変数について解かなければならないのですが、
そもそもの出発点として、

- □ 解は存在するのか?
- □ 何時解は存在するのか? → もっと言えば 解が存在するための必要十分条件は何か?
  例えば、2次方程式が実数解をもつための必要十分条件は判別式で与えられています。
  この判別式の連立1次方程式に対応するものは何なのか? ということです。
- □ 解が存在するなら、唯一通りか?
- □ 解を導く手続きは何か?

ということに興味があります。

与えられた①式を行列の形で書くことを考えます。

$$
\underset{m\times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad
\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$
とおくと

$$① \longleftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

係数行列

このAを係数行列といいます。

拡大係数行列

$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ という式から次の拡大係数行列を作ります

$$
[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]
$$

この縦棒は区切り線です

係数行列Aに1列加えているから、
拡大係数行列のサイズは $m \times (n+1)$ です。

行基本変形

行列の次の3つの操作を行基本変形という

(1) 2つの行を入れ替える
(2) 1つの行を数倍($\neq 0$)する
(3) 1つの行に他の行の何倍かを加える。

今、拡大係数行列と 行基本操作 の2つを定義しました。
この2つを どのように使うのかを 例で示してみます

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

という連立1次方程式が与えられたとします。

Step 1: 連立1次方程式を行列表示すると

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

となります。

Step 2: この連立1次方程式の拡大係数行列は

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

です。

ここに区切り線を入れることを
忘れないようにする。

Step 3: Step 2で作った拡大係数行列に、行基本操作を施していきます。
どのような考え方に基づいて行基本変形を施すのかについては後で話をします。

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 - 2r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 - 3r_3]{r_1 - r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

ここに1があるから、(1,1)成分にある2と(2,1)成分にある−1を(3,1)成分の1を使って消去します。そのためには

この記号の意味は、1行目に3行目の−2倍を加えるという意味

この操作は行基本変形の(3)を使っている。

1行目と3行目を入れ替える

この操作は行基本変形の(1)を使っています。

ここに1があるから、(1,2)成分の1と(2,2)成分の3を(3,2)成分の1を使って消去します。そのために

2行目を見ると偶数だから(−2)で割ると

$$\xrightarrow{r_2 \times (-\frac{1}{2})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 + 2r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

ここは行基本操作の(2)を使っています。

ここに1があるから、(1,3)成分の−2と(3,3)成分の1を(2,3)成分の1を使って消去したい。そのためには

この部分は3次の単位行列になりました

3つのStepを経てこの行列に辿り着きました。
この最後の行列は何を言っているのかというと、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

です。これから $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ を得ることができます。
このStep 2の方法で連立1次方程式を解くことを
掃き出し法といいます

先程 どのような考え方に基づいて行基本変形を施すのかについては後程話すと言いました。
その考え方、何をgoalとして目指したのかはここで話します。
それは、次の簡約化行列です。

簡約化行列:

簡約化行列についてはまず例を出します。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

この3つを主成分と言います。

サイズ4×7の行列です。

この行列は階段のような形になっているので階段行列とも言います。

簡約化行列とは、次の4つの条件を満たす行列です

(1) 零行ベクトルがあるなら、零行ベクトルでない行より下にある。
確かに、左の行列はその例になっています。

(2) 零行ベクトルでない行ベクトルで、
左から見て最初のnon-zeroな成分は1である。
(左の行列はそうなっています)
その成分を主成分という

(3) 各行の主成分は下の行ほど右にある。

(4) 各行の主成分を含む列の他の成分は0である。
(左の行列は確かにそうなっています。)

先程のStep 2でやった計算は、
この段階行列を目指して計算していました。

竹

ここで大切な定理を紹介します。

定理1.
Thm 1

> 定理1. $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対して
> 行基本操作を繰り返すことにより Aは簡約化できる。
> また、Aの簡約化行列は唯一通りに決まる。

この定理の大切なポイントは、簡約化行列は唯一通りに決まるということです。
先程の僕の計算は6つのstepを経て簡約化行列に出来ましたが、
人によっては3stepsで出来るかもしれないし、別の人は6stepsで出来るかもしれない。
しかし、誰が計算しても簡約化行列は唯一通りに決まるということです。

この定理の証明は長くなるので略しますが、結果はとても重要です。

rankの def.

ここで1つ言葉の定義します。

$\text{rank}(A)$ = 簡約化行列の零行ベクトルでない行ベクトルの個数.
(別の言い方をすれば)
= 簡約化行列の主成分の個数

日本語では階数と訳されています。

定理1によって簡約化行列は唯一通りに決まることが保証されているので rank の値もそれぞれの行列に対して唯一通りに決まります。

~~rankについては、次の範囲が~~
rankの範囲は次の通りです

定理2
Thm 2

> 定理2. $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ なら
> $\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$

とても当たり前の定理ですね。

1つだけ例をやってみます。
簡約化行列を求める例です。

例題1
Ex. 1

例題1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}]{} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix}$$

簡約化行列になることを目指して計算するのがだいじ。

これは簡約化行列です。
主成分の個数は3つあるので
$\text{rank}(A) = 3$ です