

第2章

(1回でやることに
する。2回)
↑
H21 ガイダンス

第2章 一般の行列とベクトル および 線形代数

§1. 数ベクトル

このように記述を併用する。

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

と書くことにする。
n次元ベクトルをいふ。

1日目の授業では、 $n=2$ の場合を考えた。

ここでは n は任意の自然数とする。

ただし、 n 個の成分が並んだ列ベクトルを考えたとき、この成分は実数の元である。

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

が与えられたとき。

□ ~~$x+y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$~~

□ $x=y \iff \forall i (1 \leq i \leq n), x_i = y_i$
と定義する。

□ $x+y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$ と対応する成分の和を
定数項と書くことにする。

□ $k \in \mathbb{R}$.

$$kx = \begin{pmatrix} kx_1 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix}$$

各成分を k 倍する意味で使われる。

特に、 $k=0$ のとき、右辺の成分はすべて 0 になる。

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書くことにする。

\mathbb{R}^n の基底ベクトル e_1, \dots, e_n の n 個の列ベクトルを定義する。

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

任意の $x \in \mathbb{R}^n$ は

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \iff$$

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

と表わすことができる。

§2. 行列とその演算

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\in M_{m,n}(\mathbb{R}) = \{ \text{成分がすべて実数である } m \times n \text{ の行列} \}$ である。
と書くことにする。すなわち、 $M_{m,n}(\mathbb{R})$ と記述する。

この A の型は $m \times n$ 個の成分が中に入っている。

この A の型は $m \times n$ である。

A の (i,j) 成分を a_{ij} と表すことにする。

$\forall i, j$ に対して、 $a_{ij} \in \mathbb{R}$ とする。

$B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とするとき、 B は A と同じ型である。

B の (i,j) 成分は b_{ij} と表す。

このとき 次の結果をよめる

① $A=B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$

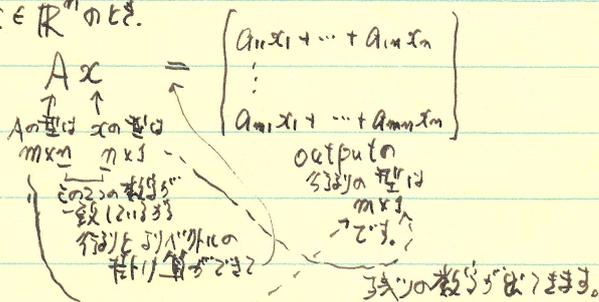
↑
 対応する
 2つの成分が
 等しいこと

② $k \in \mathbb{R}$ とし

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

③ $A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$

④ $x \in \mathbb{R}^n$ のとき



行列の表現をすれば

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

と書ける。
 ④の目的は標準形に書きかえること。今までは i を中心に見た方がよい。
 そこで A を列ベクトルに分割する。

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{と書く}$$

$$A = [a_1 \dots a_n] \quad \text{と書く}$$

これは n 列のベクトルである。

このとき

$$Ax = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{と書ける}$$

$$= x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \quad \text{と書ける}$$

⑤ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), B \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ とし

このとき AB が計算できる。

その (i,j) 成分は

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

例えば

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{とすれば}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

と書ける。一般的には $AB \neq BA$ である。

あと2問の演習問題も考えてみよう。

問題2.

$C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
正方行列

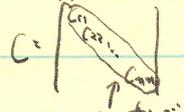
$C_{ij} = C_{ji}$ とおける。

C の対角成分

の和

$$\text{tr}(C) = C_{11} + C_{22} + \dots + C_{nn} = \sum_{i=1}^n C_{ii}$$

この和を計算 (trace)。
 C の対角成分の和。
と書く(ま)。



このおぼえは、演習問題に与えられた問題の。

一般に AB が正方行列ならば BA も正方行列である。

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

が大事。

これを2つの場合に分けてみる。

- ① AB が正方行列ならば BA も正方行列である。
- ② $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

解答 ① AB が計算できる場合は。

$A: m \times n$ 型, $B: n \times l$ 型

この場合 AB は $m \times l$ 型

$\rightarrow AB$ は $m \times l$ 型

AB が正方行列になるためには $m=l$ が必要。

$\rightarrow A$ は $m \times n$, B は $n \times m$

$\rightarrow BA$ は $n \times m$ 型になる。 BA も正方行列である。

$$\textcircled{2} (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \text{ である。}$$

よ. AB の trace を計算する。 $i=j$ の場合のみ考える。 したがって $(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki} \right)$$

$$= \begin{matrix} \boxed{a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \dots + a_{1n} b_{n1}} & i=1 \\ + \boxed{a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + \dots + a_{2n} b_{n2}} & i=2 \\ + \boxed{a_{m1} b_{1m} + a_{m2} b_{2m} + \dots + a_{mn} b_{nm}} & i=m \end{matrix}$$

目標は

$$\text{tr}(BA) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=1}^m b_{jl} a_{lj} \right)$$

$$\begin{matrix} \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{ki} & \sum_{k=1}^m a_{jk} b_{kj} & \sum_{k=1}^m a_{mk} b_{km} \end{matrix}$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=1}^m b_{jl} a_{lj} \right)$$

$$= \text{tr}(BA)$$

$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 写像

↑
この
↑
m個の成分が並んだ
列ベクトル全体の集合

↑
m個の成分が
並んだ列ベクトル
↑
全体の集合

$\forall x, y \in \mathbb{R}^m$ に対し
 $\forall k \in \mathbb{R}$

- ⑤ $f(x+y) = f(x) + f(y)$... ⑤
- ⑥ $f(kx) = kf(x)$... ⑥
- ⑤⑥が成り立つ。 f を 線形写像 とする。

$A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$

$x, y \in \mathbb{R}^m$ に対し

$$\begin{cases} A(x+y) = Ax + Ay \\ A(kx) = kAx \end{cases}$$

⑤⑥が成り立つ。 A は 線形写像 とする。

逆に、線形性を持つ写像は常に行列で表すことが出来るか? という問題を考える。

$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ に対し

$$x = \sum_{i=1}^m x_i e_i \quad e_i \text{ は基底}$$

f が線形写像

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i\right) \stackrel{\text{⑤⑥}}{=} \sum_{i=1}^m x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^m x_i a_i = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{bmatrix}}_{\substack{m \times m \text{ 型} \\ \text{行列}}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = Ax$$

f は写像として $f(e_i) \in \mathbb{R}^m$ は唯一通りに決まる。

$$f(e_i) = a_i \in \mathbb{R}^m \text{ とおく。}$$

線形写像が与えられると、行列 A が唯一決まる。

逆に行列が与えられると、線形写像が唯一決まる。

よって

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{線形写像} \quad \longleftrightarrow \quad A: m \times m \text{ 型の行列}$$

↑
一意に定まる