第2章
(1回でやることになっている)
↑
H21 ガイドライン

第2章　一般の行列とベクトル および それらの演算

§1. 数ベクトル

こういう記号を使っています。

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$ とかくことにします。

n次列ベクトルという。

1回目の授業では、$n=2$の場合を考えました。
ここでは nは任意の自然数とします。
だから、n個の成分が並んだ列ベクトルを考えている ということです。
このn個の成分が 実数 の元だということで

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$ が与えられたとき、

□ $\cancel{x+y=}$ が

□ $x = y \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall i \ (1 \leq i \leq n),\ x_i = y_i$
と定義します。

□ $$x + y = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix}$$ と 対応する成分の和で
定義する ということです。

□ $k \in \mathbb{R}$,
$$kx = \begin{bmatrix} kx_1 \\ \vdots \\ kx_n \end{bmatrix}$$
すべての成分を k倍するという意味で使います。

特に、$k=0$ なら、右辺の成分はすべて零になるが、
$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$
と書くことにします。

$\mathbb{R}^n$の 基本列ベクトルとは 次の n個の列ベクトルをいいます。

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \cdots,\ e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

大切なことは、
$$\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$ に対して、

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

と表わすことができるということです。

§2. 行列とその演算

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

とかくことにします。すなわち、$M_{m,n}(\mathbb{R})$ というのは、$\{$成分がすべて実数であるサイズが $m \times n$ の行列$\}$ です。

と書くことにします。Aは行列です。$m \times n$ 個の成分が中に入っています。
このAの型 とか サイズは $m \times n$ であるといいます。

Aの (i,j)成分 を a_{ij} であるといいます。
$\forall i,j$ に対して、$a_{ij} \in \mathbb{R}$ なら

$B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$とします。すなわち、$B$は$A$と同じ型です。
Bの (i,j) 成分は b_{ij} であるとします。

このとき 次の約束をします

$\boxed{1}$ $\underbrace{A=B}_{\text{すなわち 2つの行列が等しいとは}} \iff a_{ij}=b_{ij} \quad \forall i,j$

$\boxed{2}$ $k\in\mathbb{R}$ として

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn}\end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$ $x\in\mathbb{R}^n$ のとき.

$$Ax=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}$$

Aの型は $m\times n$　xの型は $n\times 1$

この2つの数字が一致しているから行列と列ベクトルの掛け算ができて

outputの行列の型は $m\times 1$ です。

残りの数字が出てきます。

別の表現をすると

$$(Ax)_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$$

となります。

1回目の授業でしゃべったように、行列というのは列を中心に見た方がよい。
そこで A を列ベクトルに分割します。

$$a_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{bmatrix},\ \cdots,\ a_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{bmatrix}$$ とおくと

$A=[\underbrace{a_1\cdots a_n}_{\text{各々は m次列ベクトルです.}}]$ となります.

このとき.

$$Ax=x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ x_{mn}\end{bmatrix}$$ を計算するのと同じであって

$$=x_1a_1+\cdots+x_na_n$$
となります.

$\boxed{5}$ $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B\in M_{n,l}(\mathbb{R})$ とします.
このとき、AB が計算できる.

その (i,j) 成分は

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

例えば.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1\end{bmatrix}$$ とすると

$$AB=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

となります。だから一般的には $AB\neq BA$ です。

ちょっと次のような演習問題を考えてみましょう。

問題7.

$C \in M_{n,n}(\mathbb{R})$
正方行列

$C_{ij} = c_{ij}$ であるとします。
Cの(i,j)成分は

このとき
$$\mathrm{tr}(C) = \underbrace{c_{11} + c_{22} + \cdots + c_{nn}}_{\text{これは何を計算しているかというと}} = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$$ と定義します。

Cの対角成分の和です。

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & & & \\ & c_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{nn} \end{pmatrix}$$

この和が $\mathrm{tr}(C)$ です。

このままだったら演習問題にならないのですが、問題は、
一般に ABが正方行列なら BAも正方行列であって、
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$
が成り立つ。
ここでは2つのことを示さないといけない
① ABが正方行列ならBAも正方行列であること。
② $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

解答 ① ABが計算できるということは、
$A : m \times n$型、 $B : n \times l$型
これ2つが一致してないといけない。
→ ABは $m \times l$型
ABは正方行列というのだから、$m = l$でなければならない。
→ Aは $m \times n$、 Bは $n \times m$
→ BAは $n \times n$型となるが BAも正方行列である。

② $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$ であった。
今、ABのtraceを計算したいから、$i=j$の場合のみ考えればよい。だから $(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \right)$$

$$\begin{aligned}
= \ & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & i=1 \\
+ \ & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & i=2 \\
& \vdots \\
+ \ & a_{m1}b_{1m} + a_{m2}b_{2m} + \cdots + a_{mn}b_{nm} & i=m
\end{aligned}$$

$$\sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell 1} b_{1\ell} \qquad \sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell 2} b_{2\ell} \qquad \sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell n} b_{n\ell}$$

目標は
$$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{m} b_{j\ell} a_{\ell j} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{m} b_{j\ell} a_{\ell j} \right)$$

$$= \mathrm{tr}(BA)$$

$f : \underbrace{\mathbb{R}^n}_{} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^m}_{}$ 写像

これは n個の成分が並んだ列ベクトル全体の集合

m個の成分が並んだ列ベクトル全体の集合

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$
$\forall k \in \mathbb{R}$ に対して

⑤ $\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) & \cdots ⑤ \\ f(kx) = k f(x) & \cdots ⑥ \end{cases}$
⑥

が成り立つなら、fを<u>線形写像</u>といいます。

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$x, y \in \mathbb{R}^n$ なら、

$\begin{cases} A(x+y) = Ax + Ay \\ A(kx) = kAx \end{cases}$

が成り立つから、行列Aは<u>線形写像</u>です。

逆に、線形性をもつ写像は常に行列で表すことができるか？という問題を考えます。

$\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ と表されていた。

fが線形写像なら、

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \underset{⑤・⑥}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = [\underbrace{a_1 \cdots a_n}_{\text{各}a_i\text{は}m\text{次の列ベクトル}}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = Ax$$

fは写像だから、$f(e_i) \in \mathbb{R}^m$は唯一通りに決まる。

$f(e_i) = a_i \in \mathbb{R}^m$ とおく。

線形写像が1つ与えられると、行列Aが1つ決まる。

逆に行列が与えられると、線形写像が1つ決まる。

ということは

$\underset{\text{線形写像}}{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m} \underset{1対1}{\longleftrightarrow} A : \underbrace{m \times n}_{}$ 型の行列

順番を気を付けること。