# 第３章　行列式

## 1　行列式の定義

□ $(p_1, \ldots, p_n)$: 1 から $n$ までの自然数が重複なく横一列に並んでいる順列. $n$ を長さという.

□ 長さ 2 の順列 : $(1,2)$, $(2,1)$ の 2 通り,

長さ 3 の順列 : $(1,2,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(1,3,2)$, $(3,2,1)$, $(2,1,3)$ の 6 通り.

□ $i < j$ かつ $p_2 > p_j$ なら, $p_i$ と $p_j$ に転倒があるという.

$(p_1, \ldots, p_n)$ における転倒の総数を転倒数という.

□ 転倒数が偶数なら偶順列, 転倒数が奇数なら奇順列という.

□ $\sigma = (p_1, \ldots, p_n)$ における転倒数を $r$ とする。このとき, $\mathrm{sgn}\sigma = (-1)^r$ を順列 $\sigma$ における符号と呼ぶ。

$n = 2$ のとき,

| | | |
|---|---|---|
| $\sigma = (1,2)$, | 転倒数 0, | $\mathrm{sgn}\sigma = 1$ |
| $\sigma = (2,1)$, | 転倒数 1, | $\mathrm{sgn}\sigma = -1$ |

$n = 3$ のとき,

| $\sigma$ | 転倒している個所 | 転倒数 | $\mathrm{sgn}\sigma$ |
|---|---|---|---|
| $(1,2,3)$ | なし | 0 | 1 |
| $(2,3,1)$ | $2-1$, $3-1$ | 2 | 1 |
| $(3,1,2)$ | $3-1$, $3-2$ | 2 | 1 |
| $(1,3,2)$ | $3-2$ | 1 | $-1$ |
| $(3,2,1)$ | $3-2$, $3-1$, $2-1$ | 3 | $-1$ |
| $(2,1,3)$ | $2-1$ | 1 | $-1$ |

**例題 3** 転倒数 $r$ の順列 $(p_1, \ldots, p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n)$ で $p_i$ と $p_{i+1}$ を入れ替えた順列の転倒数は, $p_i < p_{i+1}$ なら $r+1$, $p_i > p_{i+1}$ なら $r-1$ である。

**例題 4** $(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_j, \ldots, p_n)$ が偶順列（奇順列）なら, $p_i$ と $p_j$ を入れ替えた $(p_1, \ldots, p_j, \ldots, p_i, \ldots, p_n)$ は奇順列（偶順列）である。

□ $\sigma = (p_1, p_2 \ldots, p_n)$ を順列とする。順列 $\sigma$ を $\{1, \ldots, n\}$ の置換と対応させる。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$$

この記号の意味は

$$\sigma(1) = p_1,\ \sigma(2) = p_2,\ \ldots,\ \sigma(n) = p_n$$

□ $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ を

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

とおく。このとき

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{\sigma:\{1,\dots,n\} \text{ 上の} \\ \text{全ての置換}}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \in \mathbb{R}$$

を $A$ の行列式という。

**例題 5**

■ $n = 2$ のとき，

○ $\sigma_1 = (1,2) \longleftrightarrow \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

転倒数は 0 より，$\mathrm{sgn}(\sigma_1) = (-1)^0 = 1$ である。$a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} = a_{11} a_{22}$ である。

○ $\sigma_1 = (2,1) \longleftrightarrow \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

転倒数は 1 より，$\mathrm{sgn}(\sigma_1) = (-1)^1 = -1$ である。$a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} = a_{12} a_{21}$ である。

○ 従って，

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{\sigma:\{1,2\} \text{ 上の} \\ \text{全ての置換}}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

■ $n = 3$ のとき，

| $\sigma$ | $\sigma_1 = (1,2,3)$ | $\sigma_2 = (2,3,1)$ | $\sigma_3 = (3,1,2)$ | $\sigma_4 = (1,3,2)$ | $\sigma_5 = (3,2,1)$ | $\sigma_6 = (2,1,3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 転倒数 | 0 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| $\mathrm{sgn}(\sigma)$ | 1 | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ | $-1$ |
| | $\sigma_1(1) = 1$<br>$\sigma_1(2) = 2$<br>$\sigma_1(3) = 3$<br>$\downarrow$<br>$a_{11}a_{22}a_{33}$ | $\sigma_2(1) = 2$<br>$\sigma_2(2) = 3$<br>$\sigma_2(3) = 1$<br>$\downarrow$<br>$a_{12}a_{23}a_{31}$ | $\sigma_3(1) = 3$<br>$\sigma_3(2) = 1$<br>$\sigma_3(3) = 2$<br>$\downarrow$<br>$a_{13}a_{21}a_{32}$ | $\sigma_4(1) = 1$<br>$\sigma_4(2) = 3$<br>$\sigma_4(3) = 2$<br>$\downarrow$<br>$a_{11}a_{23}a_{32}$ | $\sigma_5(1) = 3$<br>$\sigma_5(2) = 2$<br>$\sigma_5(3) = 1$<br>$\downarrow$<br>$a_{13}a_{22}a_{31}$ | $\sigma_6(1) = 2$<br>$\sigma_6(2) = 1$<br>$\sigma_6(3) = 3$<br>$\downarrow$<br>$a_{12}a_{21}a_{33}$ |

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{\substack{\sigma:\{1,2,3\} \text{ 上の} \\ \text{全ての置換}}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

**例題 6**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

の $\det A$ は $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ であることを行列式の定義にしたがって求めなさい。特に，$\det E = 1$ である。

## 2　行列式の基本的性質

<u>行列式の性質</u>

[I ]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & \dots & a'_{in} + a''_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a''_{i1} & \dots & a''_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

*Proof.*

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \sum_{\substack{\sigma:\{1,\dots,n\}\ \text{上の} \\ \text{全ての置換}}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\substack{\sigma:\{1,\dots,n\}\ \text{上の} \\ \text{全ての置換}}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &\quad + \sum_{\substack{\sigma:\{1,\dots,n\}\ \text{上の} \\ \text{全ての置換}}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \text{RHS} \end{aligned}$$

□

[II ]

(1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & \dots & ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

*Proof.*

$$\begin{aligned}\text{LHS} =& \sum_{\substack{\sigma:\{1,\dots,n\}\text{ 上の} \\ \text{全ての置換}}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (c a_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} \\ =& c \sum_{\substack{\sigma:\{1,\dots,n\}\text{ 上の} \\ \text{全ての置換}}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ =& \text{RHS}\end{aligned}$$

□

(2)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

特に,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

*Proof.* $n$ 文字の置換 $\sigma$ に対して $\tau = \sigma(i, j)$ とおく。このとき,

$$\tau(i) = \sigma(j),\ \tau(j) = \sigma(i),\ \tau(k) = \tau(k)\ (k \neq i, j)$$

である。$\sigma$ が置換全体を動くと, $\tau$ も置換全体を動く。

$$\begin{aligned}\text{LHS} =& \sum_{\substack{\sigma:\{1,\dots,n\}\text{ 上の} \\ \text{全ての置換}}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{j\sigma(i)} \dots a_{i\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ =& \sum_{\substack{\tau:\{1,\dots,n\}\text{ 上の} \\ \text{全ての置換}}} (-\operatorname{sgn}(\tau)) a_{1\tau(1)} \dots a_{j\tau(j)} \dots a_{i\tau(i)} \dots a_{n\tau(n)} \\ =& - \sum_{\substack{\sigma:\{1,\dots,n\}\text{ 上の} \\ \text{全ての置換}}} \operatorname{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \dots a_{i\tau(i)} \dots a_{j\tau(j)} \dots a_{n\tau(n)} \\ =& \text{RHS}\end{aligned}$$

□

(3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ca_{i1} & \cdots & a_{jn}+ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

*Proof.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ca_{i1} & \cdots & a_{jn}+ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

□

基本行列 $p_i(c)$, $p_{ij}$, $p_{ij}(c)$ を使って行列式の性質 [II] を書き直す。
$\forall A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ とする。

[II]

(1) $|p_i(c)A| = c|A|$,

(2) $|p_{ij}A| = -|A|$,

(3) $|p_{ij}(c)A| = |A|$.

となる。$A = E$ とおくと例題 6 を使うと

(1′) $|p_i(c)| = c$,

(2′) $|p_{ij}| = -1$,

(3′) $|p_{ij}(c)| = 1$.

今，$P \in \{p_i(c), p_{ij}(c), p_{ij}\}$ とすると，(1), (2), (3) を使うと

$$|PA| = |P||A| \tag{11}$$

が成り立つ。そこで，$P_1, P_2, \ldots, P_r$ を基本行列とすると

$$\begin{aligned} |P_1P_2\ldots P_rA| &= |P_1||P_2\ldots P_rA| \\ &= \ldots \\ &= |P_1||P_2|\ldots|P_r||A| \end{aligned}$$

が成り立つ。定理 6 より正則行列 $P$ は基本行列の積で表されていたから

$$|PA| = |P||A| \tag{12}$$

が成り立つ。

**定理 8** $\forall A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ が正則行列 $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.

*Proof.* $B$ を $A$ の行基本変形による簡約化行列とする。すなわち，$B = PA$ を満たす正則行列 $P$ が存在する。(12) より

$$|B| = |P||A|.$$

□ → 向きの証明：

$A$ が正則行列であるとする。定理 6（正則行列の判定条件）を使うと，$B = E$（単位行列）である。例題 6 を使うと $|B| = 1$ であるから，$\det(A) \neq 0$ を得る。

□ ← 向きの証明：

背理法で証明する。定理 6（正則行列の判定条件）を使うと

$A$ が正則行列でない　→　$A$ の簡約化行列は $E$ でない。

簡約化行列が $E$ でないなら $\mathrm{rank}(A) < n$ である。ということは，$B$ の少なくとも 1 行は 0 行である。行列式の性質 [II](1) で $c = 0$ とおくと，$\det B = 0$ である。$|B| = |P||A|$ より $\det A = 0$ である。何が証明できたかというと，

$A$ が正則行列でない　→　$\det A = 0$

である。この対偶をとると

$\det A \neq 0$　→　$A$ が正則行列である。

□

**定理 9**（行列の積の行列式）$\forall A, B \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ に対して $|AB| = |A||B|$ が成り立つ。

*Proof.* $C$ を $A$ の簡約化行列とする。すなわち，$C = PA$ を満たす正則行列 $P$ が存在する。→ $A = P^{-1}C$. このとき，(12) を使うと $|AB| = |P^{-1}CB| = |P^{-1}||CB|$ が成り立つ。

□ $A$ が正則行列とする。このとき，$C = E$, $P^{-1} = A$ であるから，$|AB| = |A||B|$ となる。

□ $A$ が正則行列とする。定理 8 より $\det A = 0$. このとき，定理 6 より $A$ に少なくとも 1 つの 0 行が存在 → 行列の掛け算より $AB$ に 0 行が存在 → 行列式の性質 [II](1) より $|AB| = 0$ を得る。

いずれの場合も $|AB| = |A||B|$ が成り立つ。 $\square$

**定理 10** (転置の行列式) $\forall A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ に対して $|A^T| = |A|$ が成り立つ。

*Proof.* $\square$ $A$ が正則行列なら，定理 7 より

$$A = P_1 \dots P_r$$

と表される。但し，$P_1, \dots, P_r$ は基本行列である。

$$|A^T| = |(P_1 \dots P_r)^T| = |P_r^T \dots P_1^T| = |P_r^T| \dots |P_1^T|.$$

$p_i(c)$, $P_{ij}$ は対称行列より $|p_i(c) = |p_i(c)^T|$, $|P_{ij}| = |p_{ij}^T|$ である。$p_{ij}(c)^T = p_{ji}(c)$ より $|P_{ij}(c)^T| = |P_{ji}(c)| = 1 = |P_{ij}(c)|$ である。これらを使うと，これより

$$|P_r^T| \dots P_1^T| = |P_r| \dots |P_1| = |P_1| \dots |P_r| = |P_1 \dots P_r| = |A|$$

を得る。

$\square$ $A$ が正則行列でないなら，$A^T$ も正則行列でない。従って，$|A| = |A^T| = 0$ を得る。

$\square$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
&= \sum_{\substack{\sigma:\{1,\dots,n\} \text{ 上の} \\ \text{全ての置換}}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\
&= a_{11} \sum_{\substack{\sigma':\{2,\dots,n\} \text{ 上の} \\ \text{全ての置換}}} \operatorname{sgn}(\sigma') a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$