線形代数学 II (2011/10/27: 4回目，配付資料)

## 前回の授業の補足説明

$$\begin{array}{ccccc}
f:\mathbb{R}^n & \xrightarrow[\text{線形写像}]{} & \mathbb{R}^n \quad g:\mathbb{R}^n & \xrightarrow[\text{線形写像}]{} & \mathbb{R}^n \\
\text{基底 } \{a_1,\dots,a_n\} & & \text{基底 } \{b_1,\dots,b_n\} & & \text{基底 } \{a_1,\dots,a_n\}
\end{array}$$

とする。基底 $\{a_1,\dots,a_n\}$, $\{b_1,\dots,b_n\}$ に関する恒等写像 $id$ の表現行列を $F$ とおく。すなわち,

$$[id(a_1)\dots id(a_1)] = [b_1 \dots b_n]F \tag{8}$$

である。基底 $\{b_1,\dots,b_n\}$, $\{a_1,\dots,a_n\}$ に関する恒等写像 $id$ の表現行列を $G$ とおく。すなわち,

$$[id(b_1)\dots id(b_1)] = [a_1 \dots a_n]G \tag{9}$$

である。(8), (9) は，それぞれ,

$$[a_1 \dots a_n] = [b_1 \dots b_n]F, \tag{10}$$
$$[b_1 \dots b_n] = [a_1 \dots a_n]G \tag{11}$$

である。(11) を (10) に代入すると

$$[a_1 \dots a_n] = [a_1 \dots a_n]GF$$

となるから，$GF = E$ が成り立つ。(10) を (11) に代入すると，$FG = E$ が成り立つ。

**行基本変形**

① ある行をスカラー倍 ($\neq 0$) する。

② 2 つの行を入れ替える。

③ ある行に他の行のスカラー倍を加える。

**行基本変形** (r=row の略)

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&2\\3&6&2&4\\2&4&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2-3r_1\\r_3-2r_1}]{}\begin{bmatrix}1&2&0&2\\0&0&2&-2\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{2}]{}\begin{bmatrix}1&2&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{}\begin{bmatrix}1&2&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=B$$

$B$ は $A$ の行基本変形による簡約化行列である。

**列基本変形** (c=column の略)

列基本変形は上の ①, ②, ③ で行を列に置き換えた操作：

$$B=\begin{bmatrix}1&2&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[c_4-2c_1]{}\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[c_2-2c_1]{}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[c_4+c_3]{}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3]{}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=C$$

最後の行列を <u>標準形</u> と呼ぶ。

**定理 5** $\forall A\in Mat_{m,n}(\mathbb{R})$ に対して

(1) 行基本変形と列基本変形を何回か行うことにより，$A$ は必ず標準形にできる。

(2) $A$ の標準形は一意的に定まる。

## §1. 基本行列

□ 第 $i$ 行（または第 $i$ 列）を $c$ 倍 ($c\neq 0$) する。

$$p_i(c)=\begin{bmatrix}1&&&\vdots&&&\\&\ddots&&\vdots&&&\\&&1&\vdots&&&\\\cdots&\cdots&\cdots&c&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}$$

$A$ の第 $i$ 行を $c$ 倍する $\longrightarrow p_i(c)A$,

$A$ の第 $i$ 列を $c$ 倍する $\longrightarrow Ap_i(c)$,

$p_i(c)^{-1}=p_i(c^{-1})$.

□ 第 $i$ 行と第 $j$ 行（または第 $i$ 列と第 $j$ 列）を入れ替える。

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$p_{ij}^{-1} = p_{ij}$.

□ 第 $i$ 行の $c$ 倍を第 $j$ 行に加える。

$$p_{ij}(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \vdots & & \\ & \ddots & & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$p_{ij}(c)^{-1} = p_{ij}(-c)$.

第 $i$ 列の $c$ 倍を第 $j$ 列に加える $\longrightarrow p_{ij}(c)^T$.

## ○ $A$ から $B$ への行基本変形

$$\begin{aligned} & p_{31}(-1) \cdot p_2(\tfrac{1}{2}) \cdot p_{31}(-2) \cdot p_{21}(-3) \cdot A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B \end{aligned}$$

○ $B$ から $C$ への列基本変形

$$
\begin{aligned}
& B \cdot p_{41}(-2)^T \cdot p_{21}(-2)^T \cdot p_{43}(1)^T \cdot p_{23}^T \\
&= B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\
&= B \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^T \\
&= B \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

問題: $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ は

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 \end{bmatrix}$$

で定義される線形写像とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) (i) $\mathbb{R}^4$ の標準基底と $\mathbb{R}^3$ の標準基底に関する $f$ の表現行列を $F$ を求めなさい。

(ii) $F$ に行基本変形を施すことで $F$ の簡約化行列 $F'$ を求めなさい。

(iii) $F' = QF$ を満たす $Q$ と，その逆行列 $Q^{-1}$ を求めなさい。

(iv) 一般に

$$\mathrm{Im}f = \{f(x) \mid f(x) \in \mathbb{R}^n\} \text{ を } f \text{ による像 (image)}$$
$$\mathrm{Ker}f = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0 \in \mathbb{R}^m\} \text{ を } f \text{ による核 (kernel)}$$

という。

- $\mathrm{Im}f$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間であることを証明しなさい。
- $\mathrm{Ker}f$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることを証明しなさい。
- 上で定義した $f$ に対して $\mathrm{Im}f$ の基底を求めなさい。
- 上で定義した $f$ に対して $\mathrm{Ker}f$ の基底を求めなさい。

(2) (i) $F'$ の標準形 $G$ を求めなさい。

(ii) $G = F'P$ を満たす $P$ と，その逆行列 $P^{-1}$ を求めなさい。

(iii) $G$ は $\mathbb{R}^4$ のどの基底と $\mathbb{R}^3$ のどの基底の表現行列であるかを求めなさい。