# 定理 1 の証明

$F = [f_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ とおく。表現行列の定義から

$$f(a_i) = \sum_{j=1}^{m} f_{ji} b_j \tag{1}$$

と表される。$f$ の線形性と (1) を使うと

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(a_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} f_{ji} b_j\right) \tag{2}$$

となる。(2) を基底 $b_1, \ldots, b_m$ を中心に書き直す。例えば,

$$\begin{aligned} b_1 \text{ の係数 } (j = 1 \text{ の場合}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i f_{1i}, \\ b_2 \text{ の係数 } (j = 2 \text{ の場合}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i f_{2i}, \\ b_m \text{ の係数 } (j = m \text{ の場合}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i f_{mi} \end{aligned}$$

であるから，(2) は

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_{ji}\right) b_j \tag{3}$$

となる。

一方，$y \in \mathbb{R}^m$ は

$$y = \sum_{j=1}^{m} y_j b_j \tag{4}$$

と表される。ベクトルを基底の一次結合で表したとき，係数は唯一通りに決まるから (3) と (4) の $b_j$ の係数を比較すると

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{ji} \tag{5}$$

である。したがって，(8) を行列の形で表すと

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

となる。

## 定理 2 の証明

(1) $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする。$f$ と $g$ の合成写像 $g \circ f$ が線形写像であることを確かめるには

$$g \circ f(\alpha a + \beta b) = \alpha(g \circ f) + \beta(g \circ f)$$

が成り立つことを示せばよい。

$$\begin{aligned} g \circ f(\alpha a + \beta b) &= g(f(\alpha a + \beta b)) \\ &= g(\alpha f(a) + \beta f(b)) \\ &= \alpha g(f(a)) + \beta g(f(b)) \\ &= \alpha(g \circ f) + \beta(g \circ f) \end{aligned}$$

(2) $F = [f_{ji}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$, $G = [g_{ji}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq \ell}}$ とおく。このとき，$F$ の表現行列の定義から

$$f(a_i) = \sum_{j=1}^{m} f_{ji} b_j \tag{6}$$

であり，$G$ の表現行列の定義から

$$f(b_j) = \sum_{k=1}^{\ell} g_{kj} c_k \tag{7}$$

である。

$$\begin{aligned} g \circ f(a_i) &= g(f(a_i)) \\ &= g\left(\sum_{j=1}^{m} f_{ji} b_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} f_{ji} g(b_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} f_{ji} \left(\sum_{k=1}^{\ell} g_{kj} c_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{m} g_{kj} f_{ji}\right) c_k \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} (GF)_{ki} c_k \end{aligned}$$

より，$g \circ f$ の表現行列は $GF$ である。

**問題:** 次の線形写像 $f$ の与えられた基底に関する表現行列を求めよ。

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} x$$

$\mathbb{R}^3$ の基底 : $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathbb{R}^2$ の基底 : $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

(2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$g(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} x$$

$\mathbb{R}^3$ の基底 : $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$