第2章 表現行列

前回の授業で主に何を伝えたかというと.

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

線形写像

があったとする.

一般的な概念である線形写像を目で見えるようにしたいということでした.

そこで次のような考察をした.

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f\text{の行先は}} \mathbb{R}^m$

ベクトル空間

$\dim \mathbb{R}^n = n$ だから

nの標準基底がある

$e_1, \cdots, e_n \longrightarrow f(e_1), \cdots, f(e_n)$

$\qquad\qquad\qquad\quad \| \qquad\qquad \|$

$\qquad\qquad\qquad\quad a_1 \qquad\qquad a_n$ とおく.

${}^\forall x \in \mathbb{R}^n$

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longrightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$

$= [a_1 \cdots a_n] x$

$\|$ これは サイズ $m \times n$ の行列

Aとおく.

この行列をAとおくと

$f(x) = Ax$

だから何がわかったかというと

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \Longleftrightarrow \boxed{A} \in Mat_{m\,n}(\mathbb{R})$

線形写像　　何が対応しているかというと

一つ注意したいのは

この行列Aは

標準基底 $e_1, \cdots, e_n \in \mathbb{R}^n$ の

線形写像 f の行先を並べて得られたということ.

ところが

① $\mathbb{R}^n$の基底は標準基底だけでない!

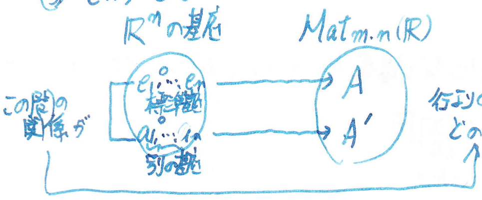
(基底の取り方は無限である)

② 線形写像が1つ与えられたとする.

$\mathbb{R}^n$の与えられた基底に対し, 線形写像に対応する行列の形が決まるだろう.

を考えているだけでまだわからない!!

③ ということは



行列の表現にどのような影響を与えるか?

ということを考えていきたい.

目標 という言葉で書くと, 次のようになる.

1. 基底を取り替えると線形写像に対応する行列の間にどのような関係があるのかを明らかにする.
2. ところでそもそも線形写像を行列で表現するメリットを明らかにする.

この目標を考えたいから、
まずは具体例から考えていきたい。

例題1. 次の f に対応する行列を求めよ。

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x-z \\ -x+3y+z \end{bmatrix} \quad \cdots (2)$$

input は3つの成分から成っているし
output は2次元ベクトルの形をしている。
この式番号を(2)とする。
先週(1)を使ったから(2)とする。

先週の復習も兼ねたいから、
丁寧にしゃべっていくことにする。

□ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mapping である。
何故なら、input に対して output が唯一通り決まっているから。

□ (2)の右辺は
- x, y, z に関して一次式 (linear)
- 定数項がない

$\xrightarrow{だから}$ f は線形写像である。

□ (2)に対応する行列の求め方は
先週やったように(そして先程説明したように)

step 1. 基底の行先を求める

step 2. 行先を順番に並べて行列を作る。

この順番に計算していこうと思う。

step 1.

$$f(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2e_1' - e_2'$$
$$f(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \cdot e_1' + 3e_2'$$
$$f(e_3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -e_1' + e_2'$$

但し、$e_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbb{R}^2$ の標準基底

これは当然のことながら $\mathbb{R}^3$ の標準基底

step 2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

この行列は、
与えられた線形写像(2)を
標準基底に関して行列で表現したものということができる。

もう少し理解を深めるために
もう一つ例題をやってみようと思う。

今やった例題1はもっとも simple な場合の行列を求める例だったけど、
次の例は基底を変えて考えてみよう。

例題2

例題2. 次の線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ の与えられた基底 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ に関する行列を求めよ.

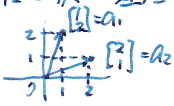
$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y \\ -3x \\ 2x-y \end{bmatrix} \quad \cdots (*)$$

$$\mathcal{A} = \left\{ \underset{a_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}, \underset{a_2}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\}, \quad \mathcal{B} = \{ e_1, e_2, e_3 \}$$

a_1 a_2 とおく

□ f は $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
線形写像である.
その理由は例題1で説明したとおり

□ a_1, a_2 は $\mathbb{R}^2$ の基底である.



平面上で a_1 と a_2 は同一直線上にないから
a_1 と a_2 は一次独立である.
$\mathbb{R}^2$ は2次元で a_1, a_2 という2つの一次独立なベクトルがあるから
a_1, a_2 は $\mathbb{R}^2$ の基底である.

だから. $\forall x \in \mathbb{R}^2$
$$x = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i a_i = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$$
と表されるから. f による基底の行先が決まれば線形写像 f は完全に決まる.

□ $f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = 5e_1 - 3e_2 + 0 \cdot e_3$

$f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = 4e_1 - 6e_2 + 3e_3$

例題1によれば
上で計算したベクトルを順番に並べればよかった
だから
$$F = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \cdots (3)$$
(3) は $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する f の行列表現である.

□ (3) の意味は何か?
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ とおく.
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ とおいたということは.
a_1, a_2 に関する座標表示.
(3) は f を $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ に関する表現行列だった.

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -15 \\ 6 \end{bmatrix} = 13e_1 - 15e_2 + 6e_3$$

移った先は e_1, e_2, e_3 に関する座標表示.

一方. 線形写像 f を
$\mathcal{A}' = \{e_1', e_2'\}$, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ に関して表現するとどうなるだろう?
$(*)$ は
$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
とかけているよね. だから線形写像 f を行列でかくと $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ であるというのは
当たり前のように感じるけど. 実はこれが $\mathcal{A}'$ と $\mathcal{B}$ に関し表現したものだよね.
$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ とおいていたから

$$1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 5e_1' + 4e_2'$$

この表示は e_1', e_2' に関する座標表示.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -15 \\ 6 \end{bmatrix}$$

答えは同じになる.

基底を取り替えたときに. 同じ線形写像の形が変わるということがわかりましたか?

§1. 線形写像の表現行列

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

線形写像

基底 $\{a_1, \cdots, a_n\}$　基底 $\{b_1, \cdots, b_m\}$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$　$x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$

a_i の行先が決まれば線形写像 f は完全に決まる。

$$f(a_i) = \sum_{j=1}^{m} \boxed{}\, b_j = \begin{bmatrix} f_{1i} \\ f_{2i} \\ \vdots \\ f_{mi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

← $b_1, \cdots, b_m$ に関する座標

ここに現れるのは

$f(a_i)$ の b_j 達に関する座標だったから

そのためには □ をどのようにかけばよいかというと f_{ji}

このとき

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix}$$

$f(a_1)$　$f(a_n)$

を基底 $\{a_1, \cdots, a_n\}$, $\{b_1, \cdots, b_m\}$ に関する f の表現行列という。

定理1（線形写像の表現行列と座標の関係）

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ $\mathbb{R}^n$ の基底　$B = \{b_1, \cdots, b_m\}$ $\mathbb{R}^m$ の基底

f の表現行列を F とする

サイズは $m \times n$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$

$f(x) = y \in \mathbb{R}^m$

$a_1, \cdots, a_n$ に関する座標

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

↑ $b_1, \cdots, b_m$ に関する座標

このとき $Fx = y$ が成立つ。