定理19 (正則行列と固有ベクトル)

$A \in Mat_{n.n}(\mathbb{R})$

$P = [p_1\, p_2 \cdots p_n] \in Mat_{n.n}(\mathbb{R})$
 正則行列とする。
 (各 $p_i \in \mathbb{R}^n$ より P のサイズは $n \times n$)
このとき、次は同値である。

(1) p_j は A の固有値 λ に対する固有ベクトルである。 $\longleftrightarrow$ 式で書くと $Ap_j = \lambda p_j$

(2) $P^{-1}AP$ の第 j 列は基本ベクトル e_j の λ 倍に等しい。 $\longrightarrow$ $P^{-1}AP = \left[\quad \right]$
第 j 列は λe_j

証明: 同値であることを証明するには
 (1) $\Rightarrow$ (2) かつ (2) $\Rightarrow$ (1) を示せばよい。

□ (1) を仮定

$$\underbrace{P^{-1}APe_j}_{} = P^{-1}Ap_j = P^{-1}(\lambda p_j) = \lambda P^{-1}p_j = \lambda P^{-1}Pe_j = \lambda E e_j = \lambda e_j$$

行列 $P^{-1}AP$ の右側から e_j をかけるということは P の第 j 列が現れる。

(1) を使っている

$\Longrightarrow P^{-1}APe_j = \lambda e_j$
 この式は何を言っているかというと、
 $P^{-1}AP$ の第 j 列は、e_j の λ 倍に等しい。

□ (2) を仮定

$P^{-1}APe_j = \lambda e_j$

$\Longleftrightarrow APe_j = \lambda Pe_j$

$\Longleftrightarrow Ap_j = \lambda p_j$

今、次のような特別な場合を考える。

$A \in Mat_{n.n}(\mathbb{R})$

A が異なる n 個の固有値 $\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}_{\text{すべて異なる場合}}$ をもつと仮定する。

$\updownarrow \qquad \updownarrow$

対応する固有ベクトルを $p_1, \cdots, p_n$ とおく。

定理15を使うと、
 A の異なる固有値に対する固有ベクトルは一次独立だったから、
 仮定より $p_1, \cdots, p_n$ はすべて一次独立である。

$\longrightarrow$ $P = [p_1 \cdots p_n]$ とおくと
 サイズ $n \times n$ かつ正則行列である。

$\longrightarrow$ $Ap_i = \lambda_i p_i$ $(i = 1, \cdots, n)$
 が成り立っている

$\longrightarrow$ 定理19から

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となっていることがわかる。

このとき、次の定理が成り立つことがわかる。

定理20 $A \in Mat_{n.n}(\mathbb{R})$
 A が異なる n 個の固有値をもつなら、
 A は対角化可能である。

60. 定理20の逆が成り立つとは限らない。
与えられた行列が何時対角化可能となるかは
次の定理で完全に解決できる。

定理21
$A \in Mat_{n \cdot n}(\mathbb{R})$
Aの異なる固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ $(r \leq n)$ とする。
重複度を $n_1, \cdots, n_r$ とする。
このとき、
Aが適当な正則行列Pで対角化可能
$\underset{\text{必要十分}}{\iff}$ $\dim W_{\lambda_i} = n_i \quad \forall i = 1, \cdots, r$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 E_{n_1} & & & 0 \\ & \lambda_2 E_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_r E_{n_r} \end{bmatrix}$$

という形をしている。

定理22 (固有値の和と積)
$A \in Mat_{n \cdot n}(\mathbb{R})$
Aの固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とすると、
(重複を許す)
$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \mathrm{tr} A \quad \left(= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)$$
$$\lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A$$

定理23 (Cayley-Hamiltonの定理)
Aの固有多項式 $f_A(\lambda)$ に対して、
$$f_A(A) = O \text{ 行列}$$
が成り立つ。

例題13. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ に対して、A^{-1}とA^6を求めなさい。

解答 $f_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$

$\xrightarrow[\text{定理23}]{}$ $f_A(A) = A^2 - A + E = O$

$$E = A - A^2$$
$$= A(E - A)$$
$$\therefore A^{-1} = E - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$x^6 = (x^2 - x + 1)(x^4 + x^3 - x - 1) + 1$ より
$$A^6 = \underbrace{(A^2 - A + E)}_{O}(A^4 + A^3 - A - E) + E$$
$$= E$$