定理18で述べた正則行列 P は どのようにして求めればよいのだろうか？
次の2つの例で考えてみる。

例題11

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ を適当な正則行列 P で三角化せよ。

解答：

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \underset{r_2+r_1}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 3-\lambda \\ -1 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \underset{公式}{=} (2-\lambda)^2(5-\lambda) + 2(2-\lambda) - 3(2-\lambda)(3-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)\big(\underbrace{(2-\lambda)(5-\lambda)+2-3(3-\lambda)}\big)$$

$$\lambda^2-7\lambda+10+2-9+3\lambda = \lambda^2-4\lambda+3 = (\lambda-3)(\lambda-1)$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

A の固有値は
$\lambda = 1, 2, 3$

固有値1に対する固有空間を W_1
これを求めるには
$(A-E)x=0$
を解けばよい。

固有値2に対する固有空間を W_2
これを求めるには
$(A-2E)x=0$
を解けばよい。

同じようにして固有値3に対する固有空間を W_3 とおく。
これを求めるには
$(A-3E)x=0$
を解けばよい。

□ $A-E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3\times\frac{1}{3}]{r_2\times(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

この最後の行列から、

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{array}{l} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{array} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

これより $W_1 = \left\{ c\underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{p_1\text{とおく}} \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}$

□ $A-2E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1\times\frac{1}{2}]{r_3+r_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2+2r_1]{r_3-r_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

これより∴ $W_2 = \left\{ c\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{p_2\text{とおく}} \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}$

□ $A-3E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2+r_1]{r_3-r_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

これより $W_3 = \left\{ c\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{p_3\text{とおく}} \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}$

定理15より 異なる固有値に対する固有ベクトルは
1次独立であるから、p_1, p_2, p_3 は1次独立である。
$\mathbb{R}^3$ という3次元ベクトル空間で3つの1次独立なベクトル p_1, p_2, p_3 が見つかったから、

$P = [p_1\ p_2\ p_3]$ とおくと P は正則行列である。このとき
サイズ 3×3

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ となる。

ここでは $P^{-1}AP$ を実際に計算しているが、
後に示す定理によれば、この場合は $P^{-1}AP$ を計算しなくても 結果は得られる。

例題12

$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\-1&0&3\end{bmatrix}$ を適当な正則行列 P で三角化せよ。

解答

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}1-\lambda&2&1\\0&1-\lambda&0\\-1&0&3-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda)+(1-\lambda)$$
$$=(1-\lambda)\left((1-\lambda)(3-\lambda)+1\right)$$
$$=(1-\lambda)(3-4\lambda+\lambda^2+1)$$
$$=(1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

Aの固有値は 1と2

重複度1
固有値1に対する
固有空間をW_1とする。
$(A-E)x=0$の
解全体の集合

$$\begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&0\\-1&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\times(-1)]{}\begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&0\\1&0&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=2x_3\\x_2=-\frac{1}{2}x_3\end{cases}$$

$$\to\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}2\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}\quad\forall c\in\mathbb{R}$$

$\to p_1=\begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}$ とする。

重複度2
固有値2に対する
固有空間をW_2とする。
$(A-2E)x=0$
の解全体の集合

$$\begin{bmatrix}-1&2&1\\0&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2\times(-1)\\r_3\times(-1)}]{}\begin{bmatrix}-1&2&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1-r_3]{}\begin{bmatrix}0&-2&0\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\quad\forall c\in\mathbb{R}$$

p_2とおく。

p_1, p_2の一次結合で表せないベクトルとして
$p_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ を選ぶと
p_1, p_2, p_3は一次独立である。

$$P=\begin{bmatrix}4&1&0\\-1&0&0\\2&1&1\end{bmatrix}$$

とおくと、Pは正則行列で

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&4&0\\-1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\-1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&0\\-1&0&0\\2&1&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

となる。