§2. 行列の三角化・対角化

$A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ が与えられたとき
$P^{-1}AP$ が出来る限り簡単な行列~~あれいれ~~になることを考えたい。
この問題の類似を以前考えたことがある。
それは、線形変換 f が与えられたとき、
上手に基底を選んで f の表現行列ができるだけ簡単な形になるようにせよ。
という問題だった。"できるだけ簡単な行列" な行列とはどういうものを考えているかというと、

言葉の説明:
A: given $\longrightarrow$ $P^{-1}AP$ を A と<u>相似</u>な行列という。
(Pは正則行列)
□ A が三角行列と相似のとき、A は<u>三角化可能</u>であるという。
□ A が対角行列 〃 A は<u>対角化可能</u> 〃 いう。

注意: ϕ
$\forall A \in Mat_{m,n}(\mathbb{R})$ は、適当な正則行列 P, Q をもってくると

$$P^{-1}AQ = \text{標準形} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \ddots 0 \end{bmatrix}$$

であった。今は $P^{-1}AP$ の場合のみを考えている。

"できるだけ簡単な行列"
$\longrightarrow$ 三角化行列 or 対角行列

対角成分にしか
nonzeroな成分しかないから
単位行列の次くらいに簡単な行列だと思う。

<u>定理18</u> (行列の三角化)
$\forall A \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ は、適当な正則行列 P で三角化可能である。
特に、A の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (重複を許す) とすると

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

とできる。