§1. 固有値と固有ベクトルの定義

$A \in Mat_{n \cdot n}(\mathbb{R})$ に対して

$$Ax = \lambda x \quad (x \neq 0) \quad \cdots (1)$$

を満たす $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在するとき

λを Aの固有値 (eigen value) という。

xを λに対する Aの固有ベクトル (eigen vector) という。

A は $Mat_{n \cdot n}(\mathbb{R})$ の元だから実行列です。
にも関わらず何故 $\lambda \in \mathbb{C}$ の範囲で取るのかは後で説明します。

注意として

□ $x=0$ なら (1)の左辺・右辺共に0になって自然に成り立つから
この場合は除いています。だから、(1)で $x \neq 0$ という条件を付けています。

□ 一方、(1)で $\lambda = 0$ なら右辺は0ベクトルですが
左辺は必ずしも0ベクトルにならない。
だから、固有値λについては $\lambda=0$ の場合が起こってもよいということになります。

(1)式は xにAを施しても xの方向が変わらないということを示しています。
それでは (1)を満たす $x \in \mathbb{R}^n$ とか $\lambda \in \mathbb{C}$ は存在するのか？
存在するなら、どのようにして求めることができるのか？ ということに興味が出てきます。
(1)式を少し眺めてみましょう。

$$Ax = \lambda x \longleftrightarrow (A-\lambda E)x = 0$$

□ λは未知数だけど
$A-\lambda E$ を係数行列とみると、この式は同次連立1次方程式の形をしています。

□ 固有ベクトルの定義から $x \neq 0$ という要求がある。
すなわち、同次連立1次方程式の中で
非自明な解を見つけなさい という問題に帰着します。

→ 上の2つの□から、
$A-\lambda E$ は正則行列でない

→ 定理8を使うと $\det(A-\lambda E) = 0$
すなわち、行列の形で書くと

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ということは、(1)に出てきたλは この行列式の解になっている。
そもそも、行列式というのは その定義から
各行から1個の成分を取ってきて (その n個の成分を) 掛ける、という操作を
すべての $\{1, \cdots, n\}$ 上の置換について足すということだったから、
この行列式は λについて n次多項式であることがわかります。

この多項式を固有多項式といって。$=0$ とおいた式を固有方程式という。

例えば:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ という恒等置換に対して。

λ は n 個現れて

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$$

という項が現れて。このとき λ が一番たくさん現れるのは行列式の def. から見てわかる。

とにかく。$A \in Mat_{n \cdot n}(\mathbb{R})$ なら。A の固有多項式は λ について n 次式であることがわかった。

代数学の基本定理によれば,

固有方程式は複素数の範囲で丁度 n 個の解をもちます。

~~これは代数学の基本定理と呼ばれています。~~

$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ とおく。

$f_A(\lambda) = 0$ の異なる解を $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ とおく。

このとき $f_A(\lambda)$ は次のように因数分解できる

$$f_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r}$$

ただし。$n_1 + \cdots + n_r = n$

この項がつく理由は。

ここから

$(-\lambda)^n = (-1)^n \lambda^n$

n_i を固有値 λ_i の重複度という

multiplicity

$A \in Mat_{n \cdot n}(\mathbb{R})$

$$W_\lambda = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x \}$$

を固有値 λ に対する A の固有空間という

eigenspace

W_λ は x として 0 ベクトルを許しています。

何故なら。W_λ はどういう $x \in \mathbb{R}^n$ の集まりであるかというと

条件として $Ax = \lambda x$ しかないから。

ということは。

固有空間 $=$ 固有された固有値 λ に対する固有ベクトル $+$ 0 ベクトル

ということです。線形代数で"空間"という言葉が出てくると"部分空間"~~である~~という意味です。

だから。

固有空間は $\mathbb{R}^n$ の部分空間

→ 部分空間というのだから基底がある筈

→ 次元は?

これは。同次連立1次方程式の解空間の次元と一致します。

すなわち。

$$\dim W_\lambda = n - \operatorname{rank}(A - \lambda E)$$

です。

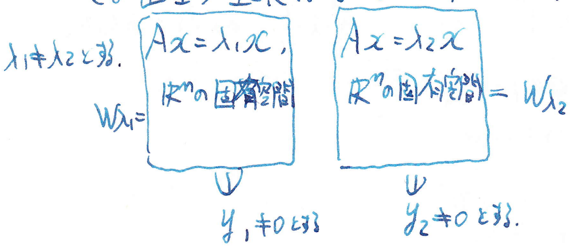
今から固有値・固有ベクトルの基本的な性質を述べていきます。

定理15（固有ベクトルの1次独立性）

Aの異なる固有値に対する固有ベクトルは1次独立である。

この定理が主張していることは何だろうか？

$\lambda_1 \neq \lambda_2$とする。



□ W_{λ_1}から1つの元y_1を取ってきて、
W_{λ_2}から1つの元y_2を取ってきて、
この2つのベクトルを比較すると必ず1次独立になっている、と主張しているのが定理15.

□ $W_{\lambda_1} \cap W_{\lambda_2}$はどうなっているのだろうか？

もし $W_{\lambda_1} \cap W_{\lambda_2} \neq \phi$ なら、

$\exists x \in W_{\lambda_1} \cap W_{\lambda_2}$

$\longrightarrow x \in W_{\lambda_1}$ かつ $x \in W_{\lambda_2}$

$\longrightarrow Ax = \lambda_1 x$ かつ $Ax = \lambda_2 x$

ここで もし $x \neq 0$ なら、

このxは W_{λ_1} にも属しているし、W_{λ_2}にも属しているから、
定理15に反することになる。
何故なら、共通の non-zero な vectorが取れたということは
一次独立性に反するから。

$\longrightarrow W_{\lambda_1} \cap W_{\lambda_2} = \{0\}$
ということが定理15から分かる。

□ 質問: Aの異なる固有値を$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$とする。
このr個の固有値に対してr個の固有空間ができる。
上で考察したことは、

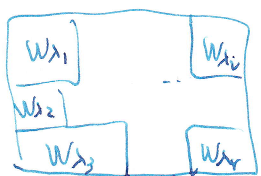
$i \neq j$ なら $W_{\lambda_i} \cap W_{\lambda_j} = \{0\}$

それでは、

$$\mathbb{R}^n = W_{\lambda_1} \cup W_{\lambda_2} \cup \cdots \cup W_{\lambda_r}$$

となっているのだろうか？

$\mathbb{R}^n =$



という具合に割れているのだろうか？
皆さんはどう考えますか？

定理16 (相似な行列の行列式)

Pを正則行列とする.
このとき, $P^{-1}AP$の固有多項式とAの固有多項式は等しい.

証明: $|P||P^{-1}| = |PP^{-1}| = |E| = 1$

$\longrightarrow |P|^{-1} = |P^{-1}|$ が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
f_{P^{-1}AP}(\lambda) &= |P^{-1}AP - \lambda E| \\
&= |P^{-1}(A-\lambda E)P| \\
&= |P^{-1}|\,|A-\lambda E|\,|P| \\
&= |A-\lambda E| \\
&= f_A(\lambda)
\end{aligned}
$$

定理16から, Aの固有多項式と$P^{-1}AP$の固有多項式は等しい

$\longrightarrow$ 固有値は重複度まで含めて等しい
しかし, 対応する固有ベクトルまでが一致するとは限らない
何故なら
$Ax = \lambda x$ とすると
$P^{-1}AP(P^{-1}x) = P^{-1}Ax = P^{-1}(\lambda x) = \lambda P^{-1}x$
ということは $P^{-1}AP$のλに対する固有ベクトルは$P^{-1}x$である.

1/12はここまで

定理17 (分割行列の固有多項式)

$A = \begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix}$ (B, Dは正方行列)
なら
$f_A(\lambda) = f_B(\lambda)\, f_D(\lambda)$
特に三角行列の固有値はその対角成分である.

証明. 一般に $\begin{bmatrix} B & C \\ O & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ O & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & C \\ O & E \end{bmatrix}$ である.
これより
$$\begin{bmatrix} B-\lambda E & C \\ O & D-\lambda E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & O \\ O & D-\lambda E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B-\lambda E & C \\ O & E \end{bmatrix}$$
両辺の行列式をとると
$$\det(A-\lambda E) = \det(D-\lambda E)\,\det(B-\lambda E)$$