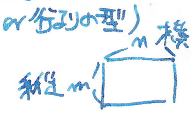
線形代数学II　2011年度（平成23年度）

神戸大学　木曜日　1限目　理学部・農学部　D414
2限目　工学部　D414

1回目は前期の授業の復習をしようと思う。
(線形代数学I)
前期の線形代数学Iの先生と記号が異なるかもしれないから
記号をちゃんと決めておこうと思う。
(以前の線形代数学IIの授業で、
授業も半ばを過ぎた頃に学生さんから　前期の先生と記号が違うと指摘されたことがある)

□ $\mathbb{R}$：実数全体の集合
real number の頭文字 R を二重線で引いた記号

□ $M_{m,n}(\mathbb{R})$ = 行列サイズが $m\times n$ で成分が実数である行列全体の集合
(or 行列の型)
matrix
行列の頭文字



□ $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Aの(i,j)成分を a_{ij} とかく。

行列はこの記号でかくことにする。

□ $\mathbb{R}^n$：n次列ベクトル全体の集合
成分は実数

第1章　線形代数学Iの復習

線形代数学Iで勉強した1つに線形写像がある。

線形写像 = 線形性 + 写像

この部分をあえて
線形ではなく線形性とかいた。
線形性という性質を持った写像について考えたいから　このようにかく。

linear　mapping
線形,一次　写像

最初に写像について復習してから、
線形性について復習しよう。

§1. 写像

X, Y：集合とする。(set)

ここでは、属するか属さないかが判定できる対象を集合と呼ぼうという程度の説明にする。

$f : X \xrightarrow[\text{写像 mapping}]{} Y$

定義域という　input に対応する

値域という　output に対応する

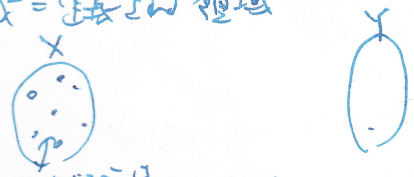
~~fによって Xの元は Yに移る~~ ということがわかっていない。

この移り方にある rule を与えたのが写像である。

それでは、どのような条件を満たせば f を写像と呼べるのだろうか？

最初に定義域という言葉について：

定義域 = 定義される領域



Xのすべての元は fによって Yに移動する。

値域 = 値をとる領域

これが言葉の def. だとしたら、Yのすべての元に xから移ってくる

というわけではなさそう…

例 $y = x^2 = f(x)$

この対応関係は写像

定義域 $= \mathbb{R}$

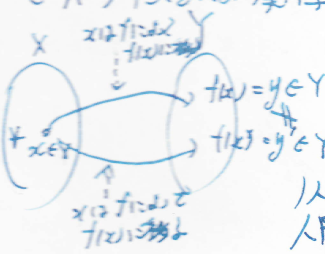
値域 $= \mathbb{R}_{\geq 0}$

それでは どういう条件を満たせば 写像と言えるのか？

> 世の中には対応関係はたくさんある：
> 恋愛関係、円とドルの対応関係、信頼関係というのもある
> 友人関係、親子関係
> きっと頭の中では定義域(input)と値域(output)があるように思う。

← 無理がある

こういうたくさんの関係の中で写像(mapping)を考えたい。



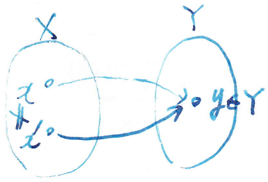
ということはない

1人の人間は同時に2人を愛してはいけないという人間世界のモラルと一致している。

写像というのを

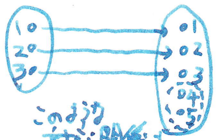
- 否定的な言い方をすると
  "Xの任意の元は fによって Yの異なる2点に移ることはない"
- 肯定的な言い方をすると
  "Xの任意の元 xに対して Yの元 yが唯一つ決まる"

ということになる。



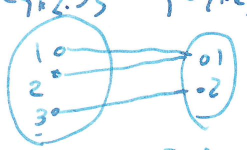
ということもあり得る。
何故なら、任意の $x \in X$ に対して $f(x) \in Y$ が唯一つ決まることには変わりがないから。

例えば
$X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



このような対応関係を考える。
対応関係は人間が考えればよい。
ところが困ったことに、この4,5にはXの誰からも移ってきてくれない。
それでもこの対応関係は写像である。
このような性質をもつ写像を
単射 injection
という。どのような性質であるかは後程説明する。

$X = \{1, 2, 3\}$ $Y = \{1, 2\}$



上の例と異なるところは、
Yのすべての元にXの元からのアプローチがあること。
この対応関係も写像である。
このような性質をもつ写像を
全射 surjection
という。

"写像という大きなカテゴリーがあって、
その中に単射・全射という性質がある。
これからどういう性質をもつ写像が単射であって全射であるのかを伝えたい。

□単射：言葉でかくと

移る前のすべての異なる2つの元は、移った後も異なる元である。

日本語でかくとこうなる。

これを数学の記号で書くと

$\forall x, x' \in X$ $(x \neq x')$ $\xrightarrow{\text{なら}}$ $f(x) \neq f(x')$

移った後も異なる元である。

これは移る前のすべての異なる2つの元という意味

ここに見慣れない記号がある。

これは数学の記号で $\forall$ = all とか any とか という意味

すべての

ちょっと否定的な主張のような気がする。

だから positive thinking で考えると。

そのために 対偶 という手段をとる。

対偶

$f(x) = f(x')$ $\xrightarrow{\text{なら}}$ $x = x'$

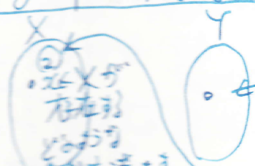
移った先が等しい

元々等しい。

これが単射という言葉の定義

□全射： 日本語でかくと

"すべての $y \in Y$ に対して、y に移ってくる X の元 x が存在する"



①番目：任意に $y \in Y$ をとってくる。

このyに対して。

② $x \in X$ が存在する

どのような条件を満たす $x \in X$ が存在するかというと。

"$f(x) = y$"

これを数学の記号を使って表すことを考える。

数学の記号で書くと

$\forall y \in Y$ $\exists x \in X$ s.t. $f(x) = y$

all という意味だった

これも見慣れない記号

$\exists$ は exist の頭文字の e をさかさまにした記号

これを英語でかくと

For all $y \in Y$, there exists $x \in X$ such that $f(x) = y$.

…射と全射の定義ができた。

全射かつ単射
and

…形写像の話に入るんだけど、線形写像も写像の一部です。ある条件を満たす写像を線形写像を

…ど、線形写像の中で全射かつ単射を満たすのは どういう性質をもつものなんだろうね？

§2. 線形写像

線形写像はベクトル空間に対して定義されます。

具体的なベクトル空間を考えよう。

例えば今日の授業の一番最初で扱った $\mathbb{R}^n$

これは記号の説明のときは
"n 次列ベクトル全体の集合"
ただし成分は実数
ということで紹介した。

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \; x_i \in \mathbb{R}, \; i=1,\cdots,n \right\}$$

こういう意味で記号を定義した。

この $\mathbb{R}^n$ は $\{\cdots\}$ という記号でかこっているから集合である。

集合と書いたら"物の集まり"という意味だけだが

$\mathbb{R}^n$ は集合よりもっと豊かな数学の例になっていて、それは

$\mathbb{R}^n$ = ベクトル空間の例である → ベクトル空間だから基底がある。 → 基底をなすベクトルの個数を次元と言った。
vector space
記号で $\dim \mathbb{R}^n = n$

vector space というと
抽象的な def になって
難しい！と思うかもしれないけど、
vector space というのは
2つのベクトルの和がまた世界に入っていて、
ベクトルのスカラー倍もその世界に入っているような
ものだと考えたらよい。

じゃその基底というのは
どういう意味だったか？
2つ条件があって
① 1次独立であること
② 他のベクトルは基底をなすベクトルの一次結合で表される。

例えば、太陽系の2つの隕石が衝突したらお互いに力を加わって、
それが1つとなってまた太陽系に属している。こういうことがすべての太陽系の星に対して
成り立つなら太陽系はベクトル空間になりそうなんだけど。
（もう1つ隕石のスカラー倍も太陽系に属しているという条件が要る）
（こういうものが vector space であるとわかってもらう。
詳しく調べたい学生さんは教科書を見るように）

元々何を説明したかったかというと、
線形写像という言葉の意味でした。

我々は $\mathbb{R}^n$ で一番簡易な基底を知っている。

それは標準基底と呼ばれる。
（どうして標準と呼ぶのだろうか？
これはすぐにわかってくれるだろう）

$\underbrace{e_1, \cdots, e_n}_{\text{標準基底}}$
n コある。
（この n は $\mathbb{R}^n$ の n と一致する）

この e_i というのはどういう形をしたものかというと、

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

← i 番目だけが 1 で
その他の成分は 0 というもっとも構造が
簡易なベクトル

このとき、$e_1, \cdots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である。

でも、$\mathbb{R}^n$ の基底は $e_1, \cdots, e_n$ だけでない。

基底の取り方は無限あって、例えば $e_1, \cdots, e_n$ のような性質を満たす基底の作り方は
グラム・シュミット または単に シュミットの直交化法 という構成を線形代数 I で
勉強した。

ところで $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ である とは

線形写像
(linear mapping)

$\forall x, x' \in \mathbb{R}^n,\ \forall c, c' \in \mathbb{R}$

$$f(cx + c'x') = c f(x) + c' f(x') \quad \cdots (1)$$

スカラー倍が外に出る.
しかも 演算を保存する

この言葉は 使わなくても よいかも

(1)の性質を 満たす 写像を <u>線形写像</u> という。

(1)の左辺の ( )の中は
ベクトルの和と スカラー倍が 定義されている必要がある から.
線形写像は ベクトル空間上で def. されるというわけ.

ただ (1)の定義 のままでは fの姿形が見えない!
fを見たい! 見えるようにしたい!!

$$\underset{\overset{\shortparallel}{a_1}}{f(e_1)}, \cdots, \underset{\overset{\shortparallel}{a_n}}{f(e_n)} \in \mathbb{R}^m$$ とおく

$\forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ は. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ と表すことが できる.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) \end{aligned}$$

(1) を使う

$$= x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$$

各々 m次の列ベクトル

この式を行列の形で かくと

$$= \underbrace{[a_1 \cdots a_n]}_{\text{サイズ } m \times n \text{ の行列}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$